

Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

K a t a l o g

mathematischer und mathematisch-physikalischer
Modelle, Apparate und Instrumente.

Nachtrag.

Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen
herausgegeben

im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung

von

Walther Dyck,

Professor an der Technischen Hochschule München.

München.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.
1893.

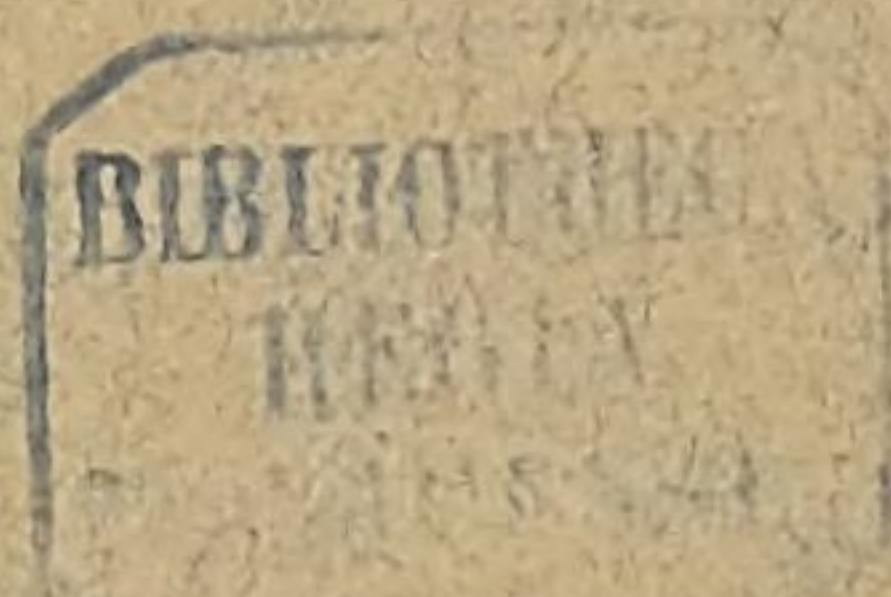
Dyck
Katalog
mathem.
Modelle
Nachtr.

42

G. Schwarz

Wb

= Gesenius 1889



Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

K a t a l o g

mathematischer und mathematisch-physikalischer
Modelle, Apparate und Instrumente.

Nachtrag.

Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen
herausgegeben

im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung

von

Walther Dyck,

Professor an der Technischen Hochschule München.

München.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

1893.



Mit dem gegenwärtigen Nachtragskatalog gelangen die Vorbereitungen zu der Ausstellung mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, welche die Deutsche Mathematiker-Vereinigung durchzuführen beschlossen hat, zum Abschluss. Als im Herbste des vorigen Jahres die Gesundheitsverhältnisse in Deutschland die Verschiebung von Versammlung und Ausstellung unabweisbar gemacht, hegte der Unterzeichnete den Wunsch und die Hoffnung, dass es gelingen möge, nunmehr das Gesamtbild der Ausstellung noch in wesentlichen Punkten zu vervollständigen. In wie weit dies erreicht ist, davon mögen die nachfolgenden Seiten Rechenschaft geben. Auch jetzt noch freilich muss für die Durchführung des ganzen Unternehmens eine nachsichtige Beurteilung vollauf in Anspruch genommen werden. Der Umfang der Arbeit, die kurze Frist für die endgültige Fertigstellung der Ausstellung, wie dieses Kataloges muss manche Unvollkommenheit und Flüchtigkeit, muss manche Lücke entschuldigen.

Wenn aber das Ganze in seiner jetzigen Gestalt geeignet ist, von den heutigen Lehr- und Forschungsmitteln ein zutreffendes Bild zu geben, wenn Anregung und Förderung für wissenschaftliche Arbeit wie für den Unterricht davon auszugehen vermag, so dankt dies die Deutsche Mathematiker-Vereinigung dem Interesse und der Teilnahme Aller, die für das Zustandekommen des Unternehmens gewirkt haben; sie dankt es vor Allem der erneuten Fürsorge und Unterstützung der Königlich Bayerischen Staatsregierung; sie dankt es dem Zusammenwirken der Fachgenossen, der Bereitwilligkeit der Aussteller, die, wo es nur immer anging, die Vorbereitungen des Vorjahres wiederholt haben!

Möge nun die in wenig Tagen stattfindende Mathematiker-Versammlung Gelegenheit geben, in Vortrag und persönlicher Besprechung das Bild zu ergänzen und zu beleben, welches die gemeinsame Arbeit zweier Jahre geschaffen.

München, am 1. September 1893.

Walther Dyck.

Inhalt.

Einleitung.

Verzeichnis der Aussteller.

Verzeichnis der Mitarbeiter am Katalog.

I. Abteilung.

Arithmetik; Algebra, Functionentheorie; Integralrechnung.

Erster Abschnitt. *Arithmetik.*

	Seite
A. Rechenapparate	1
B. Apparate zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre . . .	6

Zweiter Abschnitt. *Algebra, Functionentheorie.*

C. Apparate zur Auflösung von Gleichungen und zur Construction functioneller Abhängigkeiten	8
D. Modelle und Zeichnungen zur Algebra und Functionentheorie	23

Dritter Abschnitt. *Integralrechnung.*

F. Planimeter	32
G. Weitere Instrumente zur mechanischen Integration	34

II. Abteilung.

Geometrie.

H. Zeichenapparate	38
I. Modelle für den Elementarunterricht in Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und Darstellender Geometrie	50

K.	Polyeder, Polygon- u. Polyederteilung von Flächen und Räumen	52
L.	Ebene Curven	57
M.	Algebraische Flächen	57
N.	Raumcurven und abwickelbare Flächen; Regelflächen	58
N'.	Analysis situs	63
O.	Modelle zur Liniengeometrie	70
P.	Modelle und Zeichnungen zur Krümmungstheorie	71
	Geodätische Linien	71
	Abwicklung zweier Flächen auf einander	71
	Minimalflächen	72
Q.	Singuläre Vorkommnisse bei Curven und Flächen	72

III. Abteilung.

Angewandte Mathematik.

Erster Abschnitt. *Mechanik.*

R.	Apparate und Modelle zur Demonstration von Sätzen der Dynamik	74
S.	Kinematische Modelle und Apparate, zugleich mit Bezug auf die Anwendungen in der Praxis	96

Zweiter Abschnitt. *Mathematische Physik.*

T.	Apparate und Modelle zur Veranschaulichung der Gesetze der Fortpflanzung von Wellen	105
U.	Modelle zur Erläuterung der Krystallstructur	111
W.	Zeichnungen und Modelle zur Thermodynamik	112
X.	Modelle und Apparate zur mechanischen Versinnlichung elektro-dynamischer Vorgänge	116

Dritter Abschnitt. *Verschiedene technische Anwendungen.*

Y.	Geodätische, astronomische, nautische, meteorologische Instrumente	124
----	--	-----

	Namenregister zum II. Teil	133
--	--------------------------------------	-----

Verzeichnis der Aussteller. *)

- Adami, F., Reallehrer, Bayreuth. **300a.**
Alexander, Prof., Trinity College, Dublin. **239, 244a, b, 251a.**
Amsler-Laffon, J. & Sohn, Schaffhausen. **62a, b, 63a, 80a, b.**
Blater, J., Rastatt. **4b, 22a, b, c.**
Blümcke, A., Reallehrer, Nürnberg. **292a.**
Boys, C. V., Royal College of science London. **107c.**
Böhner, Universitätsmechaniker, Erlangen. **297a.**
Brandl, A., jr., Commissionsverlag, München. **24, 24a, b, c.**
Brugger, A., Verlagshandlung, München. **95a, 108.**
Brunn, H. Privatdocent, Universität München. **189a, b, 232a.**
Burkhardt, A., Glashütte, Sachsen. **26a, 31a.**
Cerebotani, Professor, München. **107b, 299a.**
Coradi, G., Mathematisch-mechanische Werkstätte, Zürich. **78.**
Delagrave, Ch., Verlagsbuchhandlung, Paris, rue Soufflot. **99c, 128a, 130.**
Döhlemann, K., Privatdocent, Universität München. **46c.**
Dublin, Trinity College, Sammlung für Ingenieur - Wissenschaften. **239d, 244a, b, 251a.**
Dyck, W., Professor, technische Hochschule München. **189c, 232.**
Ebert, Privatdocent, Erlangen. **297a.**
Eckhardt, E., Friedrichsdorf i/T. **96a.**
Ernst & Sohn, Verlagsbuchhandlung, Berlin. **22f, 44e.**
Fischer, K., Assistent, technische Hochschule München. **92a.**
Fischer, O., Privatdocent, Leipzig. **264a, b.**
Freytag, Ingenieur, Nürnberg. **242e.**
Galton, F., F. R. S., London, Rutland Gate. **39.**
Geodätisches Institut der technischen Hochschule München
Vorstand: Professor M. Schmidt. **4c, 11b, c, 58, 58a, 77a.**
Goldschmitt, E., Bayreuth. **95c.**
Greenhill, Prof., President math. Soc. London. **10d, 77b.**
Greuner, K., Chemnitz i/S. **24d.**
Haas, K., Professor, Wien. **300b.**
Harley, R., M. A. F. R. S. Halifax, England. **23a, 39b.**
Helberger, H., Ingenieur, München. **298b.**
Henrici, O., Professor, City and guilds of London Institute, London S. W.
Exhibition road. **90a.**
Herbst, A., Mechaniker, Berlin. **239a, 240c.**
Hermann, A., Verlagsbuchhandlung, Paris. **22g.**

*) Die beigetzten Zahlen sind Katalognummern.

- Hess, E., Professor, Universität Marburg. **137a.**
Hildebrand, Oberlehrer, Braunschweig. **102a.**
Hossfeld, C., Eisenach. **143a.**
Jadanza, N., Professor, Universität Turin. **274a.**
Ingenieurwissenschaftl. Sammlung der techn. Hochschule München. **4a, 242c.**
Joukovsky, Professor, Universität Moskau. **239h, 245b.**
Kerschensteiner, G., Gymnasiallehrer, Schweinfurt. **46a.**
Kinematische Sammlung der technischen Hochschule München.
Professor Burmester. **215b, 240a, 245a, 252a, 254a.**
Kohl, M., Werkstätte für Präzisionsmechanik. Chemnitz i/S. **233a, 233b, c.**
Koppe, Oberlehrer, Berlin. **239c, 300c, d, e.**
Kummer, G., Oberlehrer, Dresden. **120a.**
Lehner, W., stud. mech., technische Hochschule München. **103b.**
Leuner, mechanisches Institut, Dresden. **242d.**
Leuschner-Lubensky, Universitätsbuchhandlung Graz. **4d.**
Lodge, O., Professor, University College Liverpool. **295a.**
Löwen, Universität. **239f.**
Lommel, E. v., Professor, Universität München. **272a, 298a.**
Lorenz, H., Mechaniker, Chemnitz. **233d, 239e.**
Mac Mahon, F. R. S., London. **189d.**
Martz, A., Fabrik von Zeichen- und Mal-Utensilien, Stuttgart. **99a.**
Mathematisches Institut, Universität Halle. **132a, b, 173a, b.**
Mathematisches Institut, technische Hochschule Darmstadt. Vorstand: Prof. Mehmke. **40a, 43a, 50a.**
Mathematisches Institut (Seminar für darstellende Geometrie) der technischen Hochschule Karlsruhe. Vorstand: Prof. Chr. Wiener. **199a.**
Mathematisches Institut der technischen Hochschule München. Vorstand: Prof. Dyck. **148a, b, 214a, 215a.**
Mathematisches Institut der technischen Hochschule München (Sammlung für darstellende Geometrie), Burmester. **127a, b.**
Mayer, K. A., Ingenieur, Hannover. **105a.**
Mechanisch-technisches Laboratorium der technischen Hochschule München. Vorstand: Prof. Bauschinger. **242a, aa.**
Mehmke, R., Professor an der technischen Hochschule Darmstadt. **40c, d, e, f, 44b, c, d, 97a, 304a.**
Metzler'sche Buchhandlung Stuttgart. **40b.**
Miller, F., Mathematisch-mechanisches Institut in Innsbruck. **15a.**
Mohn, C., Diener am mineralogischen Institut der Universität Rostock. **276a.**
Neesen, Professor, Artillerieschule Berlin. **239g.**
Ocagne, Maurice d', Ingenieur des ponts et chaussées, Paris, rue Vienne. **44a.**
Ott, A., Mathematisch-mechanisches Institut, Kempten. **95b, 239b.**
Ott, M., Werkstätte für Präzisionsmechanik, München. **107a.**
Pötzl, Frau, Wien. **11d, 22d.**
Pringsheim, A., Professor, Universität München. **48a.**
Riefler, C., Fabrik mathematischer Instrumente. München-Nesselwang. **304b.**
Rodenberg, Professor, technische Hochschule Hannover. **250a.**
Schilling, Professor, Bremen. **255.**

- Schlegel, N., Professor, Hagen i/W. **39a.**
Schoute, P. H., Professor, Universität Groningen. **46b.**
Schröder, J., Polytechnisches Arbeitsinstitut Darmstadt. **260a.**
Schütz, J., Assistent, Universität München. **92a.**
Sharp, A., London. **90b, 90c.**
Stanley, W. F., Mathematisch-mechanisches Institut, London, W. C. Holborn
Great Turnstil 4, 5. **10a, b, c, 99b.**
Stöhrer & Sohn, mechanisches Institut Berlin. **234a, 236a, 242b,**
265a, b, 270a.
Strachey, R., Lieutenant-General, London, meteorologisches Institut. **24e.**
Tait, Professor, Universität Edinburgh. **244c.**
Töpler, Professor, technische Hochschule Dresden. **240b.**
Tötössy, B. v., Professor, technische Hochschule Budapest. **177a, b, 185a.**
Thomson, A., Science College, Poona.
Urban, B., Ettlingen bei Karlsruhe. **57a.**
Vieweg & Sohn, Verlagsbuchhandlung, Braunschweig. **22c, 44f.**
Weber, R., Professor, Universität München. **11a.**
Wiener, Chr., Professor, technische Hochschule Karlsruhe. **137b, 162a.**
-

Verzeichnis der Mitarbeiter am Katalog.

Es haben Aufsätze bzw. Referate geliefert die Herren:

Adami, F. R., Gymnasiallehrer, Bayreuth.
Alexander, Th., Professor, Trinity College, Dublin.
Blater, J., Rastatt.
Blümcke, A., Gymnasiallehrer, Nürnberg.
Boltzmann, L., Professor, Universität München.
Brunn, H., Privatdocent, Universität München.
Burmester, L., Professor, technische Hochschule München.
Cerebotani, Professor, München.
Diem, G., Assistent, technische Hochschule, München.
Döhlemann, K., Privatdocent, Universität München.
Dyck, W., Professor, technische Hochschule München.
Eckhardt, E., Friedrichsdorf i/T.
Finsterwalder, S., Professor, technische Hochschule München.
Fischer, O., Privatdocent, Leipzig.
Fischer, K., Assistent, technische Hochschule München.
Freyberg, J., Privatdozent, technische Hochschule Dresden.
Haas, K., Professor, Wien.
Henrici, O., Professor, City and Guilds of London Institute, London.
Hess, E., Professor, Universität Marburg.
Hildebrandt, Oberlehrer, Braunschweig.
Hossfeld, Gymnasiallehrer, Eisenach.
Kerschensteiner, G., Gymnasiallehrer, Schweinfurt.
Koppe, M., Oberlehrer, Berlin.
Lommel, E., Ritter von, Professor, Universität München.
Mac Mahon, P. A., London F. R. S.
Mayer, K. A., Ingenieur, Handels- und Kunstgewerbeschule Hannover.
Mehmke, R., Professor, technische Hochschule Darmstadt.
Muret, Ingenieur, Paris.
Neesen, Professor, Artillerie- und Ingenieurschule Berlin.
Ott, M., Mechaniker, München.
Pringsheim, A., Professor, Universität München.
Rodenberg, C., Professor, technische Hochschule Hannover.
Schlegel, V., Professor, Hagen i/W.
Schoute, P. H., Professor, Universität Groningen.
Schütz, J., Assistent, Universität München.
Thomson, A., Science College Poona.
Tötössy, B. v., Professor, technische Hochschule Budapest.
Weber, R., Professor, Universität München.
Wiener, Chr., Professor, technische Hochschule Karlsruhe.
Wiener, H., Privatdocent, Universität Halle a/S.

I. Abteilung.

Arithmetik; Algebra, Functionentheorie; Integralrechnung.

Erster Abschnitt. Arithmetik.

A. Rechenapparate.

- 4a. **Grosser Rechenschieber für den Unterricht** (2 Meter lang), hergestellt von **Tavernier-Gravet** in Paris; **Sammlung für Ingenieurwissenschaften der technischen Hochschule München.**
- 4b. **Ein älterer englischer Rechenschieber**, im Besitz und ausgestellt von **J. Blater** in Rastatt.

Es passt auf diesen Rechenschieber genau die Beschreibung, die *Culmann* in seiner „Graphischen Statik“ (2. Auflage, 1. Band, S. 73) von einem, von derselben (längst nicht mehr bestehenden) Firma — *Cary*, London — stammenden Schieber gegeben hat. Er ist 12 englische Zoll lang und hat zwei Zungen, eine auf der oberen, eine auf der unteren Seite, so dass der Querschnitt einem liegenden Doppel-T gleicht. Die obere Seite stimmt vollständig mit den früher allgemein üblichen Rechenschiebern ohne Mannheim'schen Läufer auch darin überein, dass die Rückseite der Zunge Teilungen für $\sin$ und $\tan$ nebst einer gleichmässigen Teilung zum Ablesen von Logarithmen trägt. Die untere Zunge wird auf der Vorderseite von drei congruenten, hinter einander folgenden logarithmischen Teilungen eingenommen, die, den Teilungen der Oberseite gegenübergestellt, u. A. zur Bestimmung von Cuben und Cubikwurzeln dienen können. Ausserdem sind noch, zum Beispiel auf den Böden der Kulissen, Teilungen für Zinseszins- und Renten-Berechnungen, ferner die bekannten Hilfszahlen für die Ermittlung der Inhalte und Gewichte von quadratischen Prismen, Cylindern und Kugeln aus verschiedenen Stoffen, und ein Masstab vorhanden. Der Schieber ist aus sehr gutem Buchsbaumholz hergestellt und sorgfältig gearbeitet. (Mehmke.)

- 4c. **Drei Rechenschieber mit trigonometrischen Functionen** von **C. Thode**, Rostock 1882. Aus dem **Geodätischen Institut der technischen Hochschule München.**

Rechenschieber aus starkem Cartonpapier, ähnlich denen von *Wüst* in Halle.

- 4d. Rechenschieber** von **Franz Ruth** an der technischen Hochschule Graz, im Verlag und ausgestellt von **Leuschner und Lubensky**, Universitätsbuchhandlung Graz.

Es sind fünf, auf stärksten Carton gedruckte, logarithmisch geteilte Masstäbe von etwas über 60 cm Länge (die einfache logarithmische Scala ist 30 cm lang.) Von diesen legt man nach Bedürfnis drei auf dem beigegebenen 7 cm breiten Brettchen neben einander und befestigt sie durch Heftstifte.

(Nach Dingler's Polytechn. Journal. Bd. 242, S. 149.)

- 10a. Rechenschieber** von **Dixon (2), Bailey, Hoare** Ausgestellt von **W. F. Stanley**, Math. mech. Institut, London.

Vergleiche hiezu die beiliegende Beschreibung in *Dixon*, Treatise on the arrangement, application, and use of Slide rules.

- 10b. Rechenschieber für Zinsrechnung.** Ausgestellt von **W. F. Stanley**. Math. mech. Institut, London.

- 10c. Universal-Masstab.** Von **W. F. Stanley**. Math. mech. Institut, London.

- 11a Forstlicher Cubirungskreis** von Prof. **R. Weber**, Universität München.

Der Cubirungskreis besteht aus 2 centrisc verdrehbaren Messing-scheiben, welche auf der cylindrischen Fläche logarithmische Theilungen tragen und zwar eine einfache und eine quadratische. Die einfach logarithmisch geteilte obere Scala bedeutet die Durchmesser, die untere quadratische bedeutet die Längen und zugleich die Cubikinhalte. Die Stelle

von $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ ist durch einen mittels Stiftchens markirten Teilstrich bezeichnet und dient als Index zum Einstellen auf die Längen der als Walzen zu cubirenden Stammabschnitte, worauf der Inhalt an der mit dem Durchmesser coincidirenden Stelle der unteren Scala nach $\frac{1}{100}$ Cubikmetern und mittelst der Theilung nach Tausendsteln abgelesen wird. Sollen stehende Stämme cubirt werden aus gemessenem Brusthöhen-Durchmesser und hypsometrisc ermittelter Gipfelhöhe, so bedient man sich anstatt des Stiftchens einer sog. „Indexzahl“ zum Einstellen des oberen Kreises. Diese Indexzahlen sind durch Umrechnung von experimentell ermittelten Baumformzahlen (gewonnen aus ca. 40000 Einzel-Untersuchungen) abgeleitet und sind auf den Seiten 16—29 der Anleitung zum Gebrauche des Instrumentes tabellarisch zusammengestellt. (R. Weber.)

- 11b. Herrmann's Rechenknecht**, herausgegeben von **Wiesenthal & Co** in Aachen aus der **Geodätischen Sammlung der technischen Hochschule München**.

Das Instrument enthält auf einer drehbaren Scheibe zehn verschiedene logarithmische Kreisteilungen, deren äusserste in bekannter Weise für die Multiplication und Division bestimmt ist. Die übrigen Scaln enthalten die Quadrat- und Würfelzahlen sowie trigonometrische Functionen.

- 11c Ringrechenscheibe** von Ingenieur **J. Knab**, München.

- 11d. Rechenscheibe für arithmetische und trigonometrische Rechnungen** von **F. M. Clouth**, Hamburg 1872. Aus dem **Geodätischen Institut der technischen Hochschule München**.

Die beiden äusseren Einteilungen (auf Limbus- und Alhidadenrand) enthalten die Logarithmen der Zahlen von 1—1000, die inneren Kreise die Logarithmen der trigonometrischen Functionen.

- 11e. Rechenschieber in Spiralforn**, construiert von dem verst. Geographen, Regierungsrat **A. Steinhauser** in Wien, ausgestellt von Frau **Pötzl**, Wien.

- 15a. Logarithmischer Tachymeter-Schieber in Scheibenform**, von **F. Miller**, mathem.-mechanisches Institut in Innsbruck.

Derselbe dient zur Bestimmung der Höhen H und der Horizontal-distanzen D von Punkten aus den mit einem Tachymeter bei senkrecht gehaltener Latte abgelesenen Lattenabschnitten L und den zugehörigen Höhenwinkeln h nach den Formeln

$$D = CL \cos^2 h,$$

$$H = CL \sin h \cos h,$$

wo C eine Constante bedeutet. Er besteht aus zwei concentrischen, in einander drehbaren Holzscheiben von 14 cm Durchmesser, (so angeordnet, dass die auf einem Celluloid-Belag angebrachten Teilungen beider Scheiben in einer Ebene liegen), und einem um den Mittelpunkt drehenden Index. Die äussere Gestalt gleicht also der von Sonne's Rechenscheibe (s. den Haupt-Katalog, Nr. 12), nur sind, dem besonderen Zweck entsprechend, die Teilungen andere, und zwar werden die beiden Hälften des inneren Kreises von zwei gleichen gewöhnlichen logarithmischen Scaln eingenommen, während der äussere Kreis zwei Teilungen trägt, welche die Logarithmen von $\cos^2 h$ bzw. $\sin h \cos h$ darstellen. Preis (mit Etui) Mk. 25.

(Prospect F. Miller, Mehmke).

- 22a. Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200000** von **J. Blater**, Wien 1887. Commissionsverlag von **A. Hölder**.

Die ersten derartigen Tafeln, welche (Euclid) das Product zweier Factoren aus dem Unterschiede der Quadrate der halben Summe und halben Differenz finden lassen, wurden 1816 in Paris von Voisin, 1817 in Karlsruhe von Bürger, 1825 in Berlin von Centnerschwer herausgegeben und erstreckten sich bis zur Factorensumme 20000. Sodann kamen 1832 in Vannes von Merpaut bis 40000 und 1852 in Prag von Kulik bis 30000 reichende Tafeln zu Stande. Ferner wurde 1874 in London von Laundry eine Tafel der Viertelquadrate bis zur Factorensumme 100000 veröffentlicht. Ein in Aussicht gestellter 2. Band dazu, der die Fortsetzung bis 200000 bilden sollte, blieb ungedruckt und das von Major Shortrede dazu berechnete Manuscript befindet sich im Privatbesitze.

Die vorliegende Tafel der Viertelquadrate für fünf- und sechsziffrige Factoren ist 1887 in Wien erschienen. Der Verfasser wurde bei der Anfertigung derselben wesentlich durch die Mitwirkung des (verst.) Regierungsrates A. Steinhauser in Wien unterstützt, der insbesondere bei der compendiösen Einrichtung der Tafel mitgewirkt hat.

Für die Einrichtung der Tafel muss auf die ausführliche Gebrauchsanweisung verwiesen werden.

Preis der Tafel broschirt 12 Mk., Pergamentmarginalien auf beiden Seiten bedruckt 50 Pfg.

22b. Hilfstafeln zur Zinsrechnung von **J. Blater**, Wien 1887. Commissionsverlag von **A. Hölder**.

(Bezüglich der Anordnung der Tafeln vergl. man die beigegebene Gebrauchsanweisung. Preis der Tafel Mk. 1.)

22c. Erleichterungs-Tafel zur Erzielung fehlerfreier und zugleich rascherer und bequemerer Ausführungen von Multiplicationen und Divisionen. Nach Angaben von Regierungsrat **A. Steinhauser** in Wien, herausgegeben von **J. Blater**, Wien 1889. **A. Hölder**, Buchhändler in Wien.

Diese Tafel bildet eine zweite verbesserte Auflage der 1886 bei Franz Frey in Mainz erschienenen Napiertafel, deren Construction sich für die Praxis nicht günstig erwies.

Während bei der „Napiertafel“ für alle n-ziffrigen Zahlen 10 n-Zahlenstäbchen aus Cartonstreifen bestehend, nötig waren, braucht man bei der vorliegenden „Erleichterungstafel“ nur 3 n-Stäbchen (rechteckige Holzprismen) eines für 0 und 1, eines für die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 und eines für die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, die das Zusammenstellen von Zahlen ebenso rasch wie das Anschreiben derselben möglich machen, ohne dass man dabei nötig hätte, zuvor eine leicht übersichtliche Ordnung derselben herzustellen, was bei der Napiertafel zur Vermeidung längeren Suchens unter 10 verschiedenen Streifen geschehen muss. Bezüglich der weiteren Anordnung vergl. man die beigegebene Gebrauchsanweisung.

Preis M. 4.50 und Mk. 3.—, mit je 30 Zahlen- und 2 Indexstäbchen; mit 15 Zahlen- und 1 Indexstäbchen Mk. 1.20 mit Gebrauchsanweisung. Dieselbe Tafel mit französischem Texte in Paris bei Gauthier-Villars, mit englischem Texte in London bei Kegan, Paul, Trench Trübner & Co.

(Blater.)

22d. Rechentabellen und Hilfstafeln, geordnet und zusammengestellt von dem verst. Geographen, Regierungsrat **A. Steinhauser** in Wien, Manuscript, ausgestellt von Frau **Pötzl**, Wien.

22e. Das graphische Einmaleins, oder die Rechentafel, ein Ersatz für den Rechenschieber. Von **G. Herrmann**. Verlag von **Vieweg & Sohn**, Braunschweig.

22f. Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte. Entworfen und berechnet von Gh. Baurat **H. Zimmermann**. Ausgestellt von der Verlagsbuchhandlung **Ernst und Sohn**, Berlin 1891.

22g. Cryptographie in Form der Rechenstäbchen (System Bazeris.) Von **A. Hermann**, Verlagsbuchhandlung, Paris.

18 Rechenstäbchen tragen auf Vorder- und Rückseite je ein Alphabet in verschiedener Anordnung. Die Stäbchen werden unter Zugrundelegung

eines Schlüsselwortes geordnet, sodann auf ihnen durch Verschieben in eine horizontale Reihe die zu chiffirenden Worte (ihren ersten 18 Buchstaben nach) eingestellt und statt dieser Horizontalen eine bestimmte andere zur Chifferschrift verwendet. Näheres vergl. die beigegebenen Erläuterungen.

23a. Lord Stanhope's (Visct. Mahon's) Arithmetical Maschine, 1780, ausgestellt von Rev. **R. Harley**. M. A. F. R. S. Halifax, England.

24. Webb's Adder, ausgestellt von **A. Brandl, jr.**, München.

Eine Zahlenscheibe, welche die Zahlenreihe von 1—100 trägt, wird mittelst eines Stiftes um einen, der jeweils zu addirenden (bis zweistelligen) Zahl entsprechenden, Winkel gedreht. Für die Addition der Hunderter dient eine kleinere Scheibe. Das Resultat erscheint in einem viereckigen Ausschnitte in der Mitte des Apparates.

24a. Ribbon's Adder, construiert von **Chas. Webb**, New-York, ausgestellt von **A. Brandl, jr.** München.

Die Zahlenreihe von 1—20 ist an einer Reihe nebeneinanderliegender Schlitzte angeschrieben. In diesen Schlitzten lassen sich Messingstreifen, die mit Löchern versehen sind, verschieben, und zwar wird diese Verschiebung dadurch bewerkstelligt, dass man einen Stift in das der zu addirenden Zahl entsprechende Loch einsetzt und nun den Streifen abwärts schiebt, bis der Stift anstösst. Das Resultat der Addition erscheint am untern Rand des Apparates.

24b, c. Comptometer und Comptograph von **Felt und Tarrant**, Chicago; ausgestellt von **A. Brandl jr.**, München.

Der Comptometer wird mit 8, 10, 12 und 16 Columnen hergestellt. Jede Columnne enthält Knöpfe mit den Zahlen von 1—9, durch deren Niederdrücken die Addition bewerkstelligt wird. Das Instrument wird auch mit einem Typendruckapparat versehen; die mit ausgestellte Zeichnung stellt diese, als Comptograph bezeichnete Anordnung dar.

24d. Multiplications-Apparat von **Kurt Greuner**, Chemnitz i. S.

Multiplicand und Multiplikator werden durch Ausziehen senkrechter bzw. wagerechter Schieber eingestellt. Man liest die Teilproducte ab und addirt im-Kopf. Die vorliegende Ausführung (in Metall mit federnder Einlegevorrichtung zum Festhalten der Schieber) entspricht zwei fünfstelligen Factoren. Preis 50 M., 5 × 6stellig M. 10 mehr.

(Greuner, Mehmke),

24e. Bouchets Adding-Maschine, ausgestellt vom **Meteorologischen Institut London**. Generallieut. **Strachey**.

Diese Maschine addirt auf drei Stellen mit Zehner-Uebertragung.

26a. Tafel mit Photographien zur Hahn'schen Rechenmaschine, (im Besitze Sr. Durchlaucht **Wilhelm, Herzog von Urach, Grafen von Württemberg**) aufgenommen und ausgestellt von **A. Burkhardt**, Glashütte, Sachsen.

Die Photographien lassen die innere Einrichtung der Rechenmaschine erkennen. Es sei hier noch angefügt, dass eine genaue Beschreibung der

interessanten Maschine von Seiten des Hrn. Prof. *Hammer* (Stuttgart) zu erwarten steht.

31a. Unterrichtsmodell zur Rechenmaschine von **Burkhardt** in Glashütte.

Statt „Analytische Maschine“ ist auf pag. 154 des Hauptkataloges zu setzen:

38. Differenzen-Maschine von **Charles-Babbage**.

B. Apparate und Zeichnungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationstheorie.

39. Quicunx, zur Illustration des Fehlergesetzes von **Francis Galton**, F. R. S.

Wir bringen nachträglich die Illustrationen zu den beiden pag. 154 des Hauptkataloges besprochenen Anordnungen des Apparates.

FIG. 7.

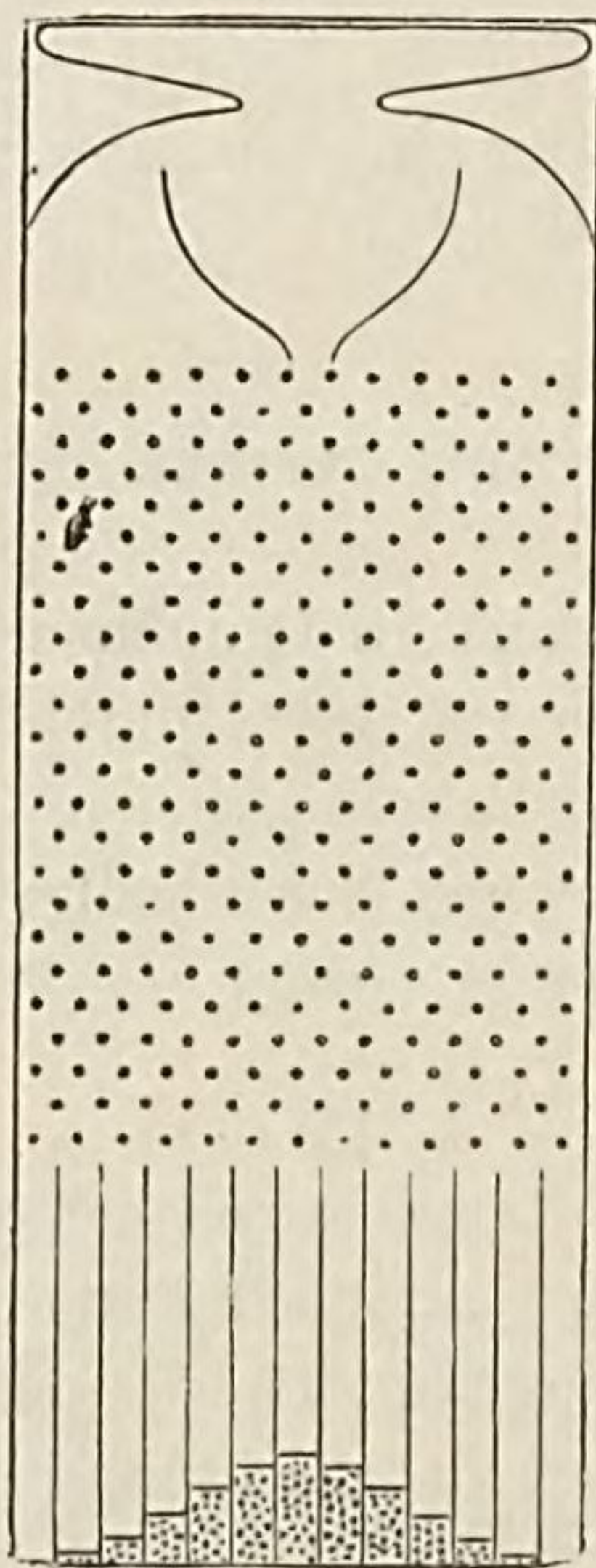
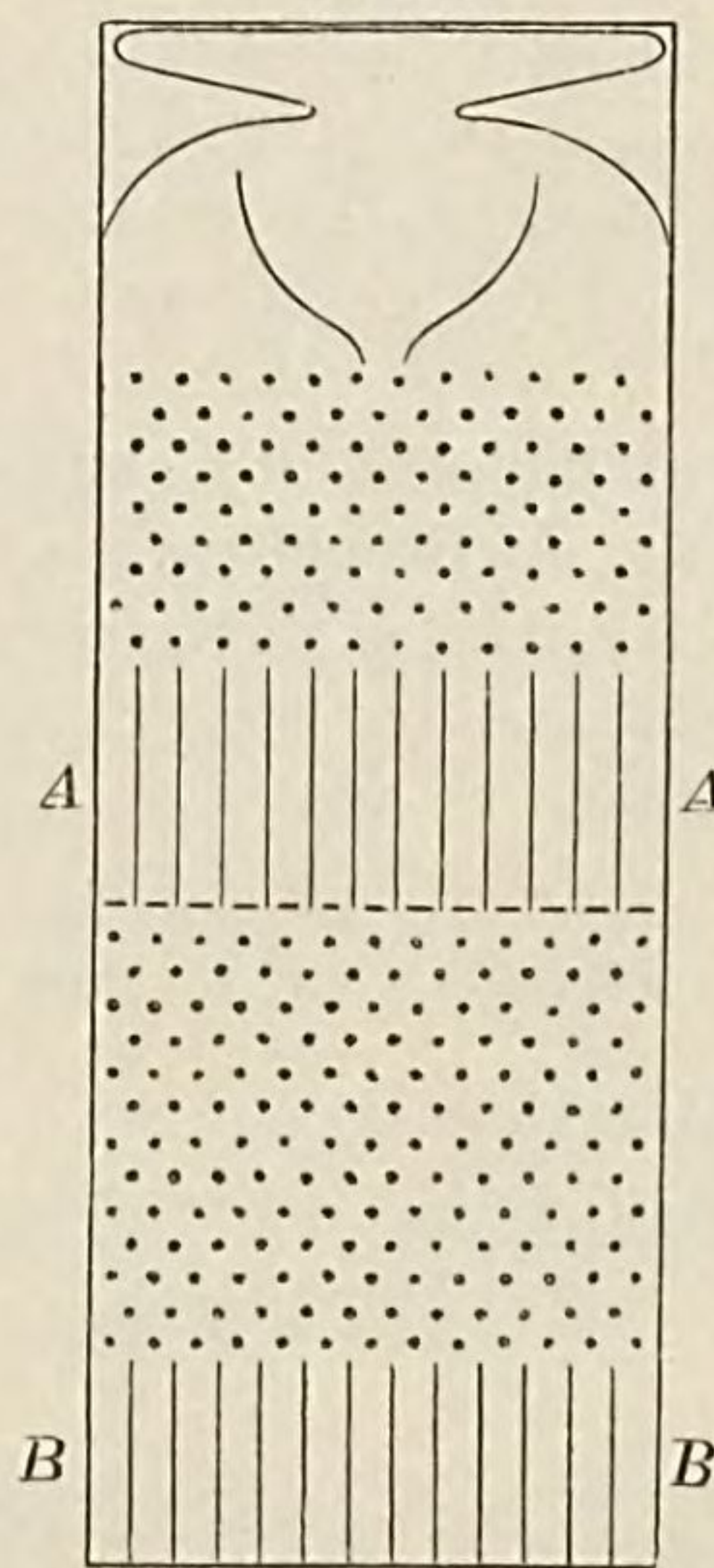


FIG. 8.



39a. Magische Würfel von 2—5 Dimensionen, berechnet und construiert von Prof. **Dr. V. Schlegel**, Hagen i/W.

Das allgemeine Glied der mit der Strecke, dem Quadrat und dem Würfel beginnenden Reihe von Gebilden ist der n -dimensionale Würfel. Die Zahl der ihn begrenzenden $(n-1)$ -dimensionalen Würfel ist $2n$, die Anzahl seiner k -dimensionalen Grenzgebilde $2^{n-k} \cdot n(k)$. — Ein solcher Würfel wird durch n aufeinander senkrechte Systeme von je $(r-1)$ Räumen, welche $(n-1)$ Dimensionen besitzen, parallel und gleichweit von einander entfernt sind, in r^n congruente kleine n -dimensionale Würfel (Zellen) zerlegt. Füllt man

diese Zellen mit den ganzen Zahlen von 1 bis r^n in der Weise aus, dass jede in einer der n Hauptrichtungen liegende Zahlenreihe die Summe $s = \frac{(1 + r^n)r}{2}$ gibt, so heisst der so gebildete Zahlkörper ein n -dimensionaler magischer Würfel. Derselbe wird vollkommen genannt, wenn auch die 2^{n-1} diagonalen Zahlreihen, welche je zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, dieselbe Summe s geben. Durch Hinzufügung weiterer Bedingungen lässt sich die Vollkommenheit des Würfels steigern und gleichzeitig die Anzahl der möglichen Würfel verringern. Namentlich kann für ungerade Werte von r verlangt werden, dass auch alle diejenigen Zahlreihen die Summe s liefern, welche die Mitten je zweier gegenüberliegender Grenzgebilde verbinden. Erwähnt seien ferner die Bedingungen, dass schiefe Zahlreihen, oder solche, die in der Rösselsprung-Richtung fortschreiten, die Summe s geben, dass die aufeinander folgenden Zahlen in ebensolchen Richtungen stehen, dass auch die Quadrate der in den einzelnen Reihen stehenden Zahlen dieselbe Summe geben, u. s. w.

Ein n -dimensionaler magischer Würfel gestattet eine von der Anzahl der Dimensionen unabhängige übersichtliche Darstellung in der Ebene, wenn man jede n -dimensionale Zelle durch ein kleines Quadrat ersetzt, in welches die zugehörige Zahl eingeschrieben wird, und diese Quadrate in gesetzmässiger Weise zu Streifen, die Streifen wieder zu grösseren Quadraten, diese Quadrate wieder zu Streifen vereinigt, u. s. w. Auf diese Weise wird schliesslich der ganze Würfel durch ein Quadrat oder einen Streifen dargestellt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Die Zahlreihen sind in diesen Darstellungen in allen vorkommenden Richtungen ohne Schwierigkeit zu verfolgen.

Der Atlas enthält in dieser Darstellung magische Quadrate mit den Seitenzahlen 3, 5, 7; 6, 10, 14; 4, 8, 12; magische Würfel gewöhnlicher Art mit den Seitenzahlen 3, 5, 7; 6, 10; 4, 8; vier dimensionale Würfel mit den Seitenzahlen 3, 5; 6, 4; endlich einen fünfdimensionalen Würfel mit der Seitenzahl 3. Beigefügte Schemas erleichtern das Auffinden der Zahlenrichtungen. Ausserdem sind jedesmal die weiteren Eigenschaften des Würfels, durch welche seine Vollkommenheit erzielt, bzw. gesteigert wird, angegeben. Weitere Erläuterungen enthalten zwei dem Atlas beigefügte Aufsätze.

Ausser der oben beschriebenen Darstellung sind für die vier- und fünfdimensionalen Würfel noch Central- und Parallelprojectionen, sowie Darstellungen mittelst regelmässiger Polygone nebst gewissen Systemen von Diagonalen angewendet, über welche der zweite der beigefügten Aufsätze nähere Auskunft gibt. Die innere Übereinstimmung dieser so sehr verschiedenen Darstellungen gibt für jede von ihnen eine Controlle der Richtigkeit, die um so erwünschter ist, als sich das projecirte oder sonst dargestellte Gebilde selbst unserer Anschauung völlig entzieht.

Hinsichtlich der noch nicht veröffentlichten Methode zur gesetzmässigen Herstellung solcher Würfel sei hier bemerkt, dass dieselbe lehrt, aus gegebenen $(n-1)$ -dimensionalen Würfeln von beliebiger Seitenzahl beliebige n -dimensionale Würfel von gleicher Seitenzahl herzustellen, wobei als 1-dimensionaler Würfel die lineare Reihe der natürlichen Zahlen in beliebiger

Reihenfolge erscheint. Wesentlich verschieden gestaltet sich die Methode für die Fälle $r = 2\lambda + 1$, $r = 4\lambda + 2$, $r = 4\lambda$, während noch ein besonderes Verfahren für $r = 2^\lambda$ angewendet werden kann.

(Schlegel.)

39b. Stanhope's „Demonstrator“, ein Instrument zum Vollziehen logischer Operationen. Von Lord Stanhop (Visct. Mahon) 1800 construiert. Ausgestellt von Rev. R. Harley, M. A. F. R. S. Halifax, England.

Der Apparat, von einem neueren von *Jevons* weit überholt, hat nur noch historisches Interesse als — von *Euler's* Kreisen abgesehen — wohl der erste Versuch, syllogistische Schlüsse auf mechanischem Wege zu ziehen. Es können nur ganz einfache Aufgaben gelöst werden, in denen nicht mehr als drei Terme vorkommen. Die Vorrichtung besteht aus drei congruenten (in je 100 Felder eingeteilten) Platten, deren untere schwarze festliegend den (vom „Mittelglied“ gelieferten) Denkbereich vorstellen soll, während die beiden beweglichen, eine opake (graue) und eine transparente (rot durchscheinende) von links und rechts (event. auch von oben) darüber geschoben werden können und zur Versinnlichung des „terminus minor“ und „major“ herhalten müssen. Die als Schlussglieder in Betracht kommenden Urteile werden mittelst „Quantification des Prädicates“ (wie: Alle A sind einige B) als Identitäten gefasst, und bei geeigneter Handhabung der Platten ersieht man aus dem ihnen gemeinsamen Felde — inwiefern im Fall „numerisch bestimmter“ Syllogismen sogar zu wie viel Zehnteln mindestens — die entsprechenden Kategorien identifiziert werden müssen — was alsdann die Conclusion ausmacht.

Vergl. *Harley*, *Mind* 1879, vol. 4, p. 192—210.

Zweiter Abschnitt. Algebra, Functionstheorie.

C. Apparate zur Auflösung von Gleichungen und zur Construction functioneller Anhängigkeiten.

40a. Zwei graphische Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen nach Lalanne (1846), ausgestellt vom mathem. Institut der techn. Hochschule Darmstadt. (Prof. **Mehmke**.)

In seiner grundlegenden Arbeit „Sur les tables graphiques“, (*Annales des ponts et chaussées, mémoires et documents*, 2^e série, t. XI, 1846) hat Léon Lalanne unter anderen Beispielen auch die Auflösung trinomischer Gleichungen mittelst graphischer Tafeln behandelt. Er betrachtet in der Gleichung

$$z^m + pz^n + q = 0$$

p und q als Cartesische Coordinaten eines veränderlichen Punktes der Ebene, so dass jedem Werte von z eine gerade Linie entspricht. Hat man — für ein bestimmtes Exponentenpaar m, n — eine hinreichende Anzahl jener Geraden construiert und die zugehörigen Werte von z daran

geschrieben, so findet man mit Hilfe der entstandenen Tafel die Wurzeln einer beliebigen Gleichung der betreffenden Form einfach dadurch, dass man den Punkt mit den Coordinaten p, q sucht und die Werte abliest, welche an den durch diesen Punkt gehenden Geraden der Tafel stehen. Lalanne macht bereits die Bemerkung, dass die Hüllcurve, welche die Geraden der Tafel ergeben, durch die gleich Null gesetzte Discriminante der Gleichung dargestellt wird, und knüpft hieran geometrische Betrachtungen über die Realität der Wurzeln sowie über die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine vorgelegte Gleichung, in welcher p und q unter gegebenen Grenzen liegen, lauter reelle Wurzeln hat.

Diese ganze Betrachtungsweise ist heutzutage den Mathematikern sehr geläufig, aber mit Unrecht bezeichnet man Sylvester und Kronecker als Urheber derselben (vergl. F. Klein, Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen; diesen Katalog S. 3).

(Mehmke).

40b. Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen von C. Reuschle 1885. Verlag der Metzler'schen Buchhandlung, Stuttgart.

Die Wurzeln der Gleichung werden erhalten als Schnittpunkte zweier möglichst einfacher Curven, bei deren graphischer Darstellung sich die Wurzelwerte angenähert ergeben. Näheres vergl. in der zugehörigen Schrift desselben Verfassers „Graph. mech. Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen“. (Metzler, Stuttgart 1884.)

Vergl. hier noch die Auflösung gewisser reducirter Gleichungen vom 3. und 4. Grad mit Hilfe des Dreiteilungszirkels von Eckhardt.

40c. Apparat zur Auflösung reeller quadratischer Gleichungen, von Prof. Mehmke, techn. Hochschule, Darmstadt.

Dieser Apparat besteht in einer Tafel aus sog. Netz- oder Millimeter-Papier, das in folgender Weise vorbereitet ist. Es sind die Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes nebst der zur x -Axe parallelen Geraden G mit der Gleichung $y = -1$ eingezeichnet und mit bezifferten Teilungen versehen, wobei jedoch die Teilung auf der zuletzt genannten Geraden den doppelten Masstab und die umgekehrte Richtung der auf der x -Axe befindlichen Teilung erhalten hat. Ausserdem ist der auf der positiven y -Axe im Abstand 1 vom Ursprung liegende Punkt p kenntlich gemacht. Soll nun die Gleichung

$$z^2 + az + b = 0$$

aufgelöst werden, so setzt man die eine Spitze eines Zirkels in den Punkt, dessen Coordinaten im obigen Coordinatensysteme (a, b) sind und öffnet den Zirkel, bis der von seiner zweiten Spitze beschriebene Kreis durch den Punkt p geht. An den Schnittpunkten dieses Kreises mit der Geraden G liest man die gesuchten Wurzeln ab.

(Mehmke.)

40d. Graphische Tafel zur Auflösung reeller cubischer Gleichungen der Form

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

1889 gezeichnet von Prof. Mehmke, techn. Hochschule, Darmstadt.

Auf derselben Grundlage beruhend, wie der unter Nr. 44, 4 (S. 163) des Hauptkatalogs beschriebene „Abacus für die Auflösung der allgemeinen cu-

bischen Gleichung“ von M. d'Ocagne, unterscheidet sich diese Tafel von der oben genannten nur dadurch, dass statt des Coefficienten von z^2 , wie bei M. d'Ocagne, hier das Absolutglied c zum Parameter der Schaar von rationalen Curven dritter Ordnung genommen ist, welche als „auflösende Curven“ dienen. Man muss daher die den Werten von a und b entsprechenden Punkte auf den Theilungen am linken resp. rechten Rande der Tafel durch eine Gerade verbinden, diese Gerade mit der zum Werte von c gehörigen Curve schneiden und an den durch die Schnittpunkte gehenden Senkrechten ablesen, um die positiven Wurzeln der gegebenen Gleichung zu erhalten. Die absoluten Werte der negativen Wurzeln findet man, wie bei M. d'Ocagne, indem man die positiven Wurzeln der Gleichung

$$z^3 - az^2 + bz - c = 0$$

sucht.

(Mehmke.)

40c Graphische Tafeln zur mechanischen Auflösung reeller trinomischer Gleichungen, vollständiger Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades und zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten, von Prof. Mehmke, techn. Hochschule Darmstadt.

Die Theorie dieser Tafeln ist bereits in des Verfassers Abhandlungen „Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen“ (Civilingenieur, Band 35, 1889) und „Neues Verfahren zur Bestimmung der reellen Wurzeln zweier numerischen algebraischen Gleichungen mit zwei Unbekannten“ (Schlömilch's Zeitschrift, Jahrgang 35, 1890) mitgeteilt worden. Es möge dieselbe in anderer Darstellung hier kurz wiederholt werden.

Construirt man (nach Annahme eines beliebigen Cartesischen Coordinatensystems in der Ebene) zu jedem, mit der Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

verträglichen Wertepaar der positiven reellen Veränderlichen x und y den Punkt mit der Abscisse $\log x$ und der Ordinate $\log y$, so erhält man eine Curve, die das „logarithmische Bild“ jener Gleichung genannt werden soll. Welchen Einfluss hat eine beliebige Verschiebung dieser Curve auf die Gestalt der zugehörigen Gleichung? Sind $\log \rho$ und $\log \sigma$ die Componenten der Verschiebung parallel den Axen, so hat der Punkt mit den Coordinaten $\log x$, $\log y$ vor der Verschiebung die Coordinaten

$$\log x - \log \rho = \log \frac{x}{\rho}, \quad \log y - \log \sigma = \log \frac{y}{\sigma}$$

gehabt. Wenn daher

$$F(x, y) = C x^m y^n + C_1 x^{m_1} y^{n_1} + \dots$$

ist, so gehört zur verschobenen Curve die Gleichung

$$F\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\sigma}\right) = C \left(\frac{x}{\rho}\right)^m \left(\frac{y}{\sigma}\right)^n + C_1 \left(\frac{x}{\rho}\right)^{m_1} \left(\frac{y}{\sigma}\right)^{n_1} + \dots = 0$$

oder

$$\frac{C}{\rho^m \sigma^n} \cdot x^m y^n + \frac{C_1}{\rho^{m_1} \sigma^{n_1}} \cdot x^{m_1} y^{n_1} + \dots = 0.$$

Man sieht: Zahl und Gestalt der Glieder, und, weil ρ und σ positive Grössen bedeuten, auch die Vorzeichen der einzelnen Glieder sind un-

verändert geblieben; es haben bloss die Coefficienten ihre absoluten Werte geändert. Man kann im Allgemeinen immer eine solche Verschiebung mit der Curve vornehmen, dass in der zur verschobenen Curve gehörigen Gleichung die Coefficienten von drei beliebig ausgewählten Gliedern dem absoluten Betrage nach einander gleich werden und folglich nach Division der ganzen Gleichung mit dem gemeinsamen absoluten Betrage jener Coefficienten dieselben den Wert ± 1 erhalten. Soll dies nämlich bei den Gliedern mit den Indices h, i, k geschehen, so muss

$$(m_h - m_i) \log \rho + (n_h - n_i) \log \sigma = \log |C_h| - \log |C_i|,$$

$$(m_h - m_k) \log \rho + (n_h - n_k) \log \sigma = \log |C_h| - \log |C_k|$$

sein, aus welchen beiden Gleichungen sich die Verschiebungsgrößen $\log \rho$ und $\log \sigma$ eindeutig berechnen lassen, falls nicht etwa die Determinante

$$\begin{vmatrix} m_h - m_i & n_h - n_i \\ m_h - m_k & n_h - n_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m_h & n_h \\ 1 & m_i & n_i \\ 1 & m_k & n_k \end{vmatrix}$$

verschwindet. Daher kann z. B., wenn a, b, c positive Größen bezeichnen, das logarithmische Bild von

$$ax^3y + bxy^3 = c$$

durch Verschieben aus dem logarithmischen Bilde von

$$x^3y + xy^3 = 1$$

erhalten werden; ebenso das logarithmische Bild der Gleichung

$$y = ax^2 - bx - c$$

aus der zu einem bestimmten Wert von λ gehörigen Curve derjenigen Curvenschaar, welche in den logarithmischen Bildern von

$$y = x^2 - x - \lambda,$$

mit positivem veränderlichen λ , besteht. Allgemein: Besitzt die Gleichung $F(x, y) = 0$ entweder drei, oder vier Glieder der Form $C_i x^{m_i} y^{n_i}$, so lässt sich ihr logarithmisches Bild im ersten Falle aus einer nur von den Exponenten m_i, n_i abhängenden Curve, im zweiten Fall aus einer bestimmten Curve einer, ebenfalls nur von jenen Coefficienten abhängenden Curvenschaar mit einem Parameter durch blosses Verschieben ableiten. Hat man nun häufig ein System zweier Gleichungen von bestimmter Form, z. B. der Form

$$ax^3y + bxy^3 = c,$$

$$a' \sqrt[3]{x} - b' \sqrt[3]{y} = c'$$

numerisch aufzulösen, so wird man die logarithmischen Bilder der Gleichungen

$$x^3y + xy^3 = 1 \quad \text{und}$$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1,$$

beide, etwa auf besondere Blätter Pauspapier, im Voraus zeichnen, und wenn dann die Coefficienten a, b, c, a', b', c' bestimmte Zahlenwerte haben, so braucht man nur jene Curven auf ein mit geteilten Axen versehenes Blatt in der richtigen Weise aufzulegen und die Coordinaten der Schnittpunkte beider Curven abzulesen, um die Lo-

arithmen der Wurzeln des gegebenen Systems von Gleichungen zu erhalten. Sind die Axen logarithmisch geteilt, so ergeben sich sogar ohne weiteres die Zahlenwerte der gesuchten Wurzeln selbst. Eine Gleichung mit vier Gliedern erfordert eine Curvenschaar, statt einer einzelnen Curve. Der Fall einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten, etwa

$$f(x) = 0,$$

lässt sich auf den vorigen dadurch zurückführen, dass man die Gleichung auf irgend eine Weise in die Form

$$f_1(x) = f_2(x)$$

bringt und hierauf jede Seite derselben gleich $+cy$ oder gleich $-cy$ setzt, wo c eine willkürliche positive Constante bezeichnet. Besteht $f(x)$ aus drei oder vier Gliedern bestimmter Form, so reicht man mit einer, bez. zwei einzelnen ein für allemal gezeichneten Curven aus; eine einzelne Curve und eine Curvenschaar bezw. zwei Curvenschaaren sind erforderlich, wenn $f(x)$ fünf bezw. sechs Glieder hat. (Weiteres s. unten bei der Einzelbesprechung der ausgestellten Tafeln). Die Anwendung der Logarithmen bringt es mit sich, dass unser Verfahren zunächst nur die positiven Wurzeln liefert. Um auch die absoluten Werte der negativen Wurzeln, z. B. der Gleichung $f(x) = 0$, zu finden, bestimmt man die positiven Wurzeln der Gleichung $f(-x) = 0$.

Für die wirkliche Anwendung des Verfahrens ist es nicht gleichgültig, dass man ohne Rechnung finden kann, in welche Lage man z. B. das logarithmische Bild der Gleichung

$$x^3y + xy^3 = 1$$

zu bringen hat, damit es die Gleichung

$$ax^3y + bxy^3 = c$$

logarithmisch vorstelle. Es möge diese Frage, wie auch die nach der Berechnung des Parameters λ , allgemein für die logarithmischen Bilder von

$$F_0(x, y) = \pm x^m y^n \pm x^{m_1} y^{n_1} \pm x^{m_2} y^{n_2} \pm \lambda x^{m_3} y^{n_3} \pm \dots = 0 \quad \text{und}$$

$F(x, y) = \pm Cx^m y^n \pm C_1 x^{m_1} y^{n_1} \pm C_2 x^{m_2} y^{n_2} \pm C_3 x^{m_3} y^{n_3} \pm \dots = 0$, wo $C_1, C_2, C_3 \dots$ jetzt positiv sein sollen, beantwortet werden. Man zeichnet auf ein und dasselbe Blatt mit dem zu verschiebenden logarithmischen Bilde von F_0 die (in geraden Linien bestehenden) logarithmischen Bilder L_1, L_2 und L_3 der Gleichungen

$$x^m y^n = x^{m_i} y^{n_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

und bringt auf der X- oder Y-Axe des ruhenden Systemes logarithmische Teilungen in den Masstäben $1 : (m - m_i)$ bezw. $1 : (n - n_i)$ an. Die Einstellung für ein bestimmtes Wertsystem C, C_1, C_2, C_3 geschieht dann, indem man jenes Blatt unter Wahrung seiner Axenrichtungen verschiebt, bis die Geraden L_1 und L_2 durch die den Werten $C_1 : C$ bezw. $C_2 : C$ entsprechenden Punkte der ersten bezw. zweiten logarithmischen Teilung auf der X- oder Y-Axe der ruhenden Unterlage gehen. Ist die Einstellung beendet, so liest man den Wert z ab, der am Schnittpunkt der Linie L_3 mit der X- oder Y-Axe und zwar bei der dritten logarithmischen Teilung steht. Dann ist

$$\lambda = \frac{C_3}{z \cdot C}$$

(Ausrechnung mit dem Rechenschieber).

Bei der Anwendung auf die Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten hat $F(x, y)$ immer die Form

$$\pm Cy \pm C_1 x^{m_1} \pm C_2 x^{m_2} \pm \dots,$$

so dass

$$n - n_1 = n - n_2 = n - n_3 = 1$$

wird. Die auf der Y-Axe anzubringenden Teilungen sind daher in diesem Falle einander gleich und ihr Masstab ist derjenige der ganzen Zeichnung.

Wie man sieht, kommt weder bei der Einstellung, noch bei der Berechnung von λ , auf die Vorzeichen der Glieder von F etwas an. Natürlich können das ruhende und das verschobene System auch mit einander vertauscht werden. Gehen wir jetzt zur Betrachtung der einzelnen Tafeln über.

1) Trinomische Gleichungen.

Die Gleichung

$$ax'^m \pm bx'^n \pm c = 0$$

wird durch die Substitution $x'^n = x$ auf die Form

$$ax^{\frac{m}{n}} \pm bx \pm c = 0$$

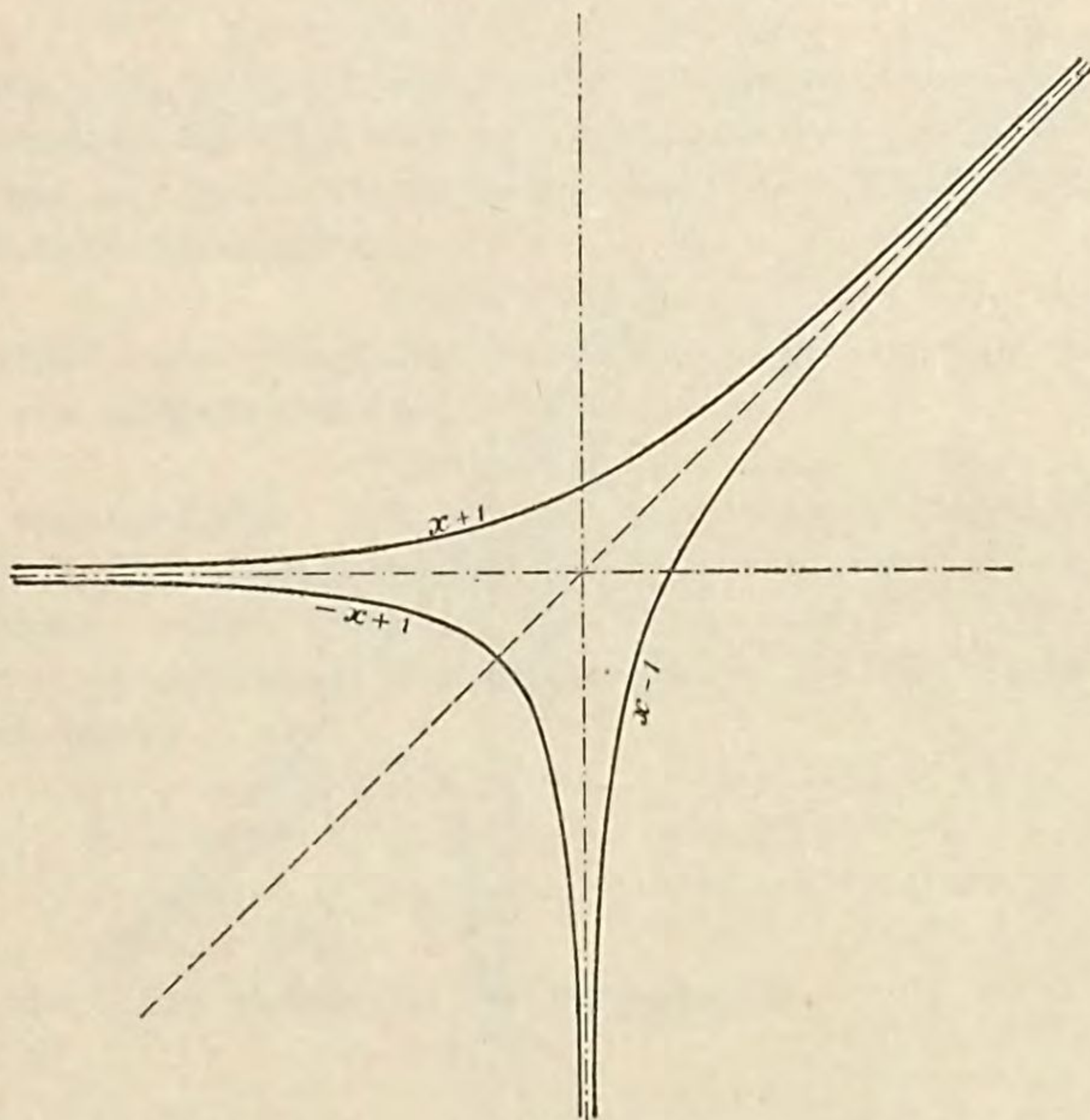


Fig. 1.

gebracht, die wir allein berücksichtigen wollen. Letztere Gleichung lässt sich in folgende beiden zerlegen:

$$ay = ax^{\frac{m}{n}} \quad \text{d. h.} \quad y = x^{\frac{m}{n}}$$

und

$$ay = \pm bx \pm c.$$

Das logarithmische Bild der ersten dieser Gleichungen ist eine durch den Ursprung gehende Gerade, das der letzteren erhält man aus dem logarithmischen Bilde einer der drei Gleichungen

$$y = x + 1, \quad y = x - 1, \quad y = -x + 1$$

durch Verschiebung (s. Fig. 1), vorausgesetzt, dass die Glieder der rechten Seite nicht beide negativ sind, in welchem Fall es imaginär ist und die Gleichung keine reellen positiven Wurzeln hat. Auf ein Blatt Pauspapier sind die logarithmisch geteilten Axen nebst den durch die Teilpunkte der X-Axe gehenden Parallelen zur Y-Axe und den zu einer Anzahl von Werten m/n gehörigen Geraden gezeichnet. Dieses Blatt muss man so auf die Tafel mit den genannten drei Curven legen, dass (bei gleicher Richtung der Axen auf Pauspapier und Tafel) die den Werten $b:a$ und $c:a$ entsprechenden Teilpunkte der Y-Axe des Pauspapiers auf die Gerade $y=x$ bzw. $y=1$ der Tafel zu liegen kommen. Dann muss man die Schnittpunkte der dem gegebenen Werte von m/n entsprechenden Geraden des Pauspapiers mit der zur betreffenden Zeichenverbindung gehörigen Curve der Tafel suchen und an der hindurchgehenden Parallelen zur Y-Axe ablesen. Beim Uebergang von x zu $-x$ vertauschen sich die Curven der Tafel, während die Lage des Pauspapiers unverändert bleibt.

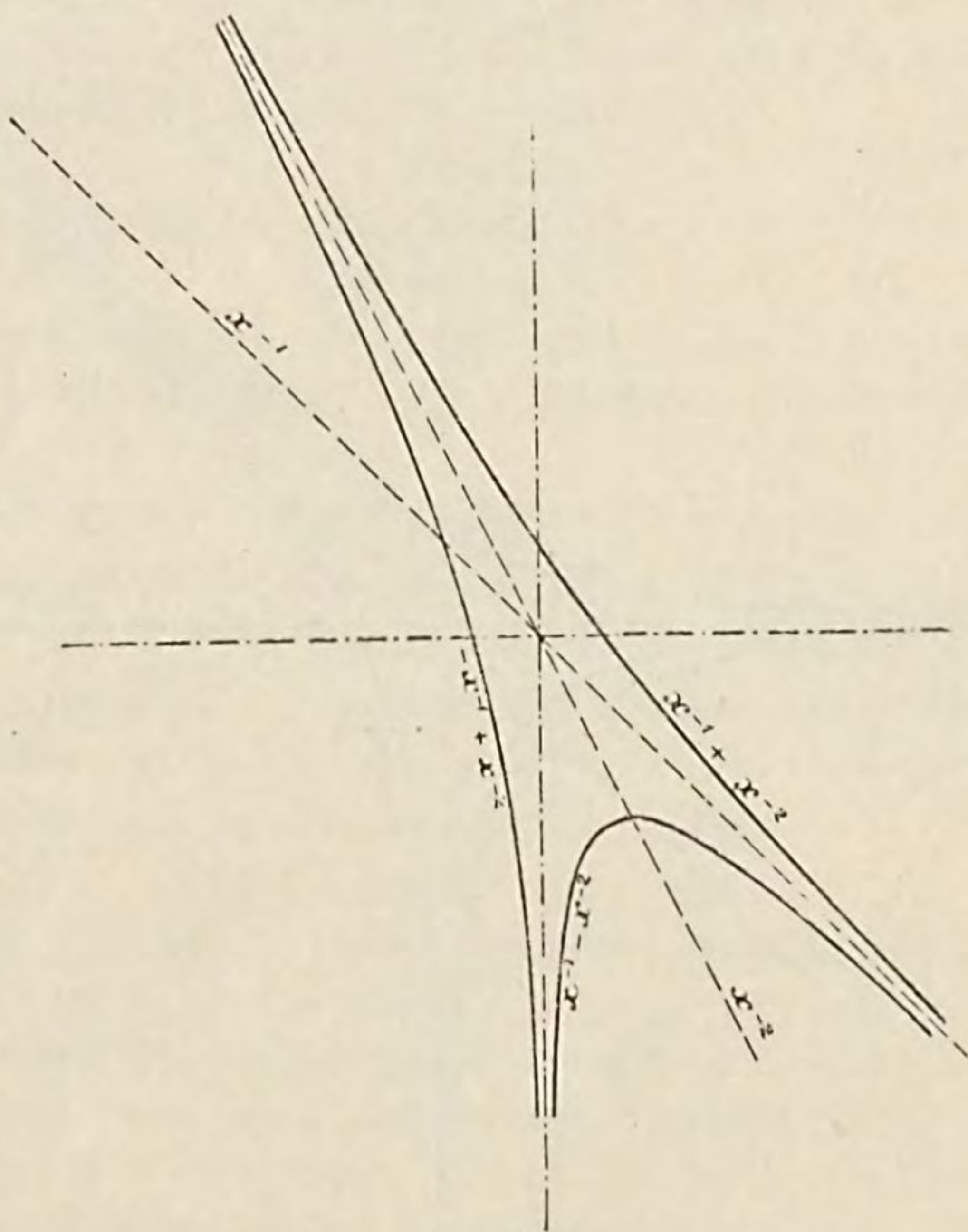


Fig. 2.

2) Vollständige Gleichungen dritten, vierten und fünften Grades.

Als ruhendes System dient eine Tafel mit logarithmisch geteilter

Y-Axe — Teilstriche und Ziffern sind blau — sowie den (rot gezeichneten und bezifferten) Parallelen zur Y-Axe durch die Teilpunkte der logarithmisch geteilten, aber nicht ausgezogenen X-Axe. Die aufzulegenden Curven und Curvenschaaren sind von den (ebenfalls ausgestellten) Tafeln, auf denen sie construiert wurden, auf Pauspapier übertragen.

Bei den vollständigen cubischen Gleichungen

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

ist die mit einer Division durch x^2 verbundene Zerlegung in das System

$$y = \pm ax \pm b, \\ y = \pm cx^{-1} \pm dx^{-2},$$

zu Grunde gelegt, der zufolge man einerseits die uns schon aus Fig. 1 bekannten logarithmischen Bilder der Gleichungen

$$y = x + 1, \quad y = x - 1, \quad y = -x + 1;$$

andererseits (s. Fig. 2) diejenigen der Gleichungen

$$y = x^{-1} + x^{-2}, \quad y = x^{-1} - x^{-2}, \quad y = -x^{-1} + x^{-2}$$

nötig hat.

Bei den vollständigen biquadratischen Gleichungen

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm dx \pm e = 0$$

ist die Zerlegung in

$$y = \pm ax^2 \pm bx \pm c \\ y = \pm dx^{-1} \pm ex^{-2}$$

gewählt. Die zweite dieser Gleichungen bietet nichts Neues; das logarithmische Bild der ersten entsteht, wie bereits bekannt, durch Verschieben aus der zu einem bestimmten Wert von λ gehörigen Curve der Schaar zur Gleichung

$$y = \pm x^2 \pm x \pm \lambda.$$

Hinsichtlich der Vorzeichen der Glieder sind acht Fälle zu unterscheiden, von welchen der Fall

$$y = -x^2 - x - \lambda$$

sich sofort erledigt, weil zu ihm keine reellen Curven gehören. Um eine mehrfache Bedeckung mit Curven zu vermeiden, mussten die übrig bleibenden sieben Fälle auf vier Blätter verteilt werden, und zwar wurden je auf einem Blatt untergebracht die Curvenschaaren zu den Gleichungen:

- 1) $y = x^2 + x + \lambda$ und $y = x^2 + x - \lambda$;
- 2) $y = x^2 - x + \lambda$ „ $y = x^2 - x - \lambda$;
- 3) $y = -x^2 + x + \lambda$ „ $y = -x^2 + x - \lambda$;
- 4) $y = -x^2 - x + \lambda$.

Man kann ebenso gut die Zerlegung in

$$y = \pm ax \pm b$$

und

$$y = \pm cx^{-1} \pm dx^{-2} \pm ex^{-3}$$

benützen. Während die erste dieser Gleichungen schon wiederholt aufgetreten ist, erfordert die zweite neue Curvenschaaren, nämlich die logarithmischen Bilder von

$$y = \pm \mu x^{-1} \pm x^{-2} \pm x^{-3},$$

mit der positiven Grösse μ als Parameter. Es genügen wieder vier Blätter zur Unterbringung der sieben Fälle. Was endlich die vollständigen Gleichungen fünften Grades

$$ax^5 \pm bx^4 \pm cx^3 \pm dx^2 \pm ex \pm f = 0$$

betrifft, so kann man hier in

$$y = \pm ax^2 \pm bx \pm c$$

und

$$y = \pm dx^{-1} \pm ex^{-2} \pm fx^{-3}$$

zerlegen. Es kommen dann beide Arten der oben betrachteten Curvenschaaren zur Anwendung.

3) Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Es sind nur zu den, aus Obigem schon bekannten Beispielen

$$ax \pm by = \pm c, \quad a\sqrt[3]{x} \pm b\sqrt[3]{y} = \pm c, \quad ax^3y \pm bxy^3 = \pm c$$

Tafeln angefertigt worden.

Genauere Anweisungen zum Gebrauch, mit Zahlenbeispielen, findet man bei den Tafeln selbst.

Bezüglich der Construction des logarithmischen Bildes einer beliebigen Gleichung zwischen zwei Veränderlichen muss auf die angeführten Abhandlungen verwiesen werden. Beim Zeichnen der ausgestellten Curventafeln hat Prof. *Brauer's* logarithmischer Zirkel (s. Nr. 97a) vorzügliche Dienste geleistet. (Mehmke.)

40f. Graphische Tafeln zur mechanischen Bestimmung sämtlicher Wurzeln von trinomischen Gleichungen mit (reellen oder) complexen Coefficienten, von Prof. **Mehmke**, technische Hochschule Darmstadt.

Diese Tafeln sind zwar aus einer noch nicht veröffentlichten Methode des Verfassers, beliebige Gleichungen mit complexen Coefficienten graphisch zu lösen, hervorgegangen, lassen sich aber auch unabhängig davon erklären.

Sei — unter a, b, c positive reelle Grössen verstanden —

$$1) \quad ae^{i\alpha} \cdot z^m + be^{i\beta} \cdot z^n + ce^{i\gamma} = 0$$

die gegebene Gleichung mit der Unbekannten $z = re^{i\varphi}$.

Wir setzen

$$2) \quad z = ke^{i\chi} \cdot z', \quad z' = r' \cdot e^{i\varphi'},$$

woraus

$$\log r = \log r' + \log k, \quad \varphi \equiv \varphi' + \chi \pmod{2\pi}$$

folgt, und suchen k und χ so zu bestimmen, dass in der neuen Gleichung die Coefficienten von z'^m und z'^n einander gleich werden. Diese Coefficienten sind

$$ak^m e^{i(\alpha + m\chi)} \quad \text{und} \quad bk^n e^{i(\beta + n\chi)}$$

Man hat somit k und χ zu berechnen aus

$$3) \quad k = \sqrt[m-n]{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad \log k = \frac{\log b - \log a}{m-n}$$

und

$$\chi \equiv \frac{\beta - \alpha}{m-n} \pmod{2\pi}.$$

Nach Division mit dem gemeinsamen Coefficienten der ersten beiden Glieder verwandelt sich die neue Gleichung in

$$4) \quad z'^m + z'^n + l e^{i\lambda} = 0,$$

wo

$$5) \quad 1 = c \sqrt[m-n]{\frac{a^n}{b^m}} \quad \text{oder} \quad \log l = \log c + \frac{n \log a - \log b}{m - n}$$

und

$$\lambda \equiv \gamma + \frac{n\alpha - m\beta}{m - n} \pmod{2\pi} \text{ ist}$$

Wir nehmen jetzt ein Cartesisches Coordinatensystem in der Ebene beliebig an und betrachten $\log r'$ und φ' als Coordinaten eines veränderlichen Punktes. Dieser Punkt wird eine bestimmte Curve beschreiben, wenn man in Gleichung 4) l einen festen Wert gibt und λ alle möglichen Werte annehmen lässt. Wir denken uns eine Reihe solcher Curven gezeichnet und die zugehörigen Werte von l daran geschrieben. Nun erteile man λ einzelne bestimmte Werte und lasse l sich verändern, das gibt eine zweite Curvenschaar. Eine derartige Tafel mit l -Curven und λ -Curven kann man sich für einzelne Verbindungen der Exponenten m, n , z. B. 2, 1 (vollständige quadratische Gleichungen); 3, 1 (reducirte cubische Gleichungen); 5, 1 (Gleichungen fünften Grades in der Bring'schen Form) im Voraus construiren. Man bedarf ausserdem noch eines auf durchsichtigen Stoff gezeichneten Axensystems. Wenn dann für $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ in Gleichung 1) irgend welche Zahlenwerte gegeben sind, so berechne man — was auf graphischem oder mechanischen Wege möglich ist — k, z, l, λ mit Hilfe der Gleichungen 3) und 5), lege das durchsichtige Axensystem so auf die (zur betreffenden Verbindung m, n gehörige) Curventafel, dass entsprechende Axen parallel sind und der Nullpunkt der Curventafel unter dem Punkt der durchsichtigen Tafel mit den Coordinaten $\log k, z$ liegt und suche die gegenseitigen Schnittpunkte der zu den betreffenden Werten l, λ gehörigen Curven. Hat ein solcher Punkt im Axensystem der durchsichtigen Tafel die Coordinaten $\log r$ und φ , so ist $re^{i\varphi}$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Ist die erste Axe logarithmisch geteilt, so kann unmittelbar r , statt $\log r$, abgelesen werden. Bei den ausgestellten Tafeln ist übrigens angenommen, dass man die Winkel α, λ, φ nicht in analytischem Mass, sondern in Graden sog. neuer Teilung (rechter Winkel gleich 100 Grad) ausdrückt.

Bei der Construction der Tafeln wurden die „Additionslogarithmen für complexe Grössen“ bzw. die zugehörigen Flächen (s. Nr. 50a, S. 31) benützt. (Mehmke.)

43a. Graphische Tafel zur Geschwindigkeitsformel von Kutter, nach dem 1869 erschienenen Originale vergrössert gezeichnet im **mathem. Institut der techn. Hochschule Darmstadt** (Prof. **Mehmke**).

Diese Tafel, deren Urbild erstmals einer 1869 veröffentlichten Abhandlung mit dem Titel „Versuch zur Aufstellung einer neuen allgemeinen For-

mel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, ..., von E. Ganguillet und W. R. Kutter, Ingenieuren in Bern,“ beigegeben war, (siehe die Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 21. Jahrgang, insbes. § 35 a, S. 50, und Figur XIII auf Blatt Nr. 9), und seither durch Abdruck im Handbuch der Ingenieurwissenschaften sowie im Taschenbuch des Ingenieurs, herausgegeben vom Verein „Hütte“, grosse Verbreitung gefunden hat, ist ihres geschichtlichen Interesses wegen ausgestellt worden. Sie bildet nämlich, wie es scheint, das älteste Beispiel der Anwendung einer wichtigen Methode zur geometrischen Darstellung von Functionen mit mehreren Veränderlichen, welche neuerdings von Herrn M. d'Ocagne allgemein begründet und Methode der „isoplethen Punkte“ genannt worden ist (vergl. dessen Nomographie, Paris 1891, sowie diesen Katalog, Nr. 44, S. 162).

Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in irgend einem Querschnitt eines Kanals ist

$$v = c \sqrt{RI},$$

wo R den sog. hydraulischen Radius (Quotienten aus Inhalt des Querschnittes in qm und benetztem Umfang in m) und I das Gefälle auf eine Kanalstrecke von der Länge Eins bezeichnet. Nach Kutter setzt man

$$c = \frac{23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{I}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{I}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}},$$

wobei der Coefficient n sich mit der Rauigkeit des benetzten Umfanges ändert. Der Zweck der Tafel ist, durch ein mechanisches Verfahren zu gegebenen Werten von drei beliebigen der vier Grössen R, I, n, c den Wert der vierten zu bestimmen.

In der Form

$$\frac{x}{\sqrt{R}} + \frac{y}{c} = 1,$$

mit den Abkürzungen

$$x = -\left(23 + \frac{0,00155}{I}\right)n, \quad y = 23 + \frac{1}{n} + \frac{0,00155}{I}$$

geschrieben, zeigt obige Gleichung, dass der Punkt mit den Cartesischen Coordinaten x, y auf einer Geraden liegt, welche von den Coordinatenachsen die Stücken $\sqrt{R}$ und c abschneidet. Bei constantem n und veränderlichem I beschreibt der Punkt (x, y) offenbar eine gerade Linie, bei constantem I und veränderlichem n dagegen eine gleichseitige Hyperbel. Eine Anzahl solcher „n-Linien“ und I-Curven“ sind ein für allemal gezeichnet. Ist nun z. B. ein Wertsystem R, I, n gegeben, so verbindet man den Punkt $\sqrt{R}$ der X-Axe mit dem Schnittpunkt der betreffenden n-Linie und I-Curve durch eine gerade Linie; dann wird man am Schnittpunkt derselben mit der y-Axe den gesuchten Wert von c ablesen können. (Mehmke.)

44a. Abacus von Maurice d'Ocagne, ingénieur des ponts et chaussées, Paris.

5) Abacus zur Berechnung der Erdausfüllung bei Dammarbeiten.

Die Berechnung des Flächeninhaltes (im Querschnitt) der aufzufüllen-den, beziehungsweise abzutragenden Erde geschieht, wie bei den im Haupt-

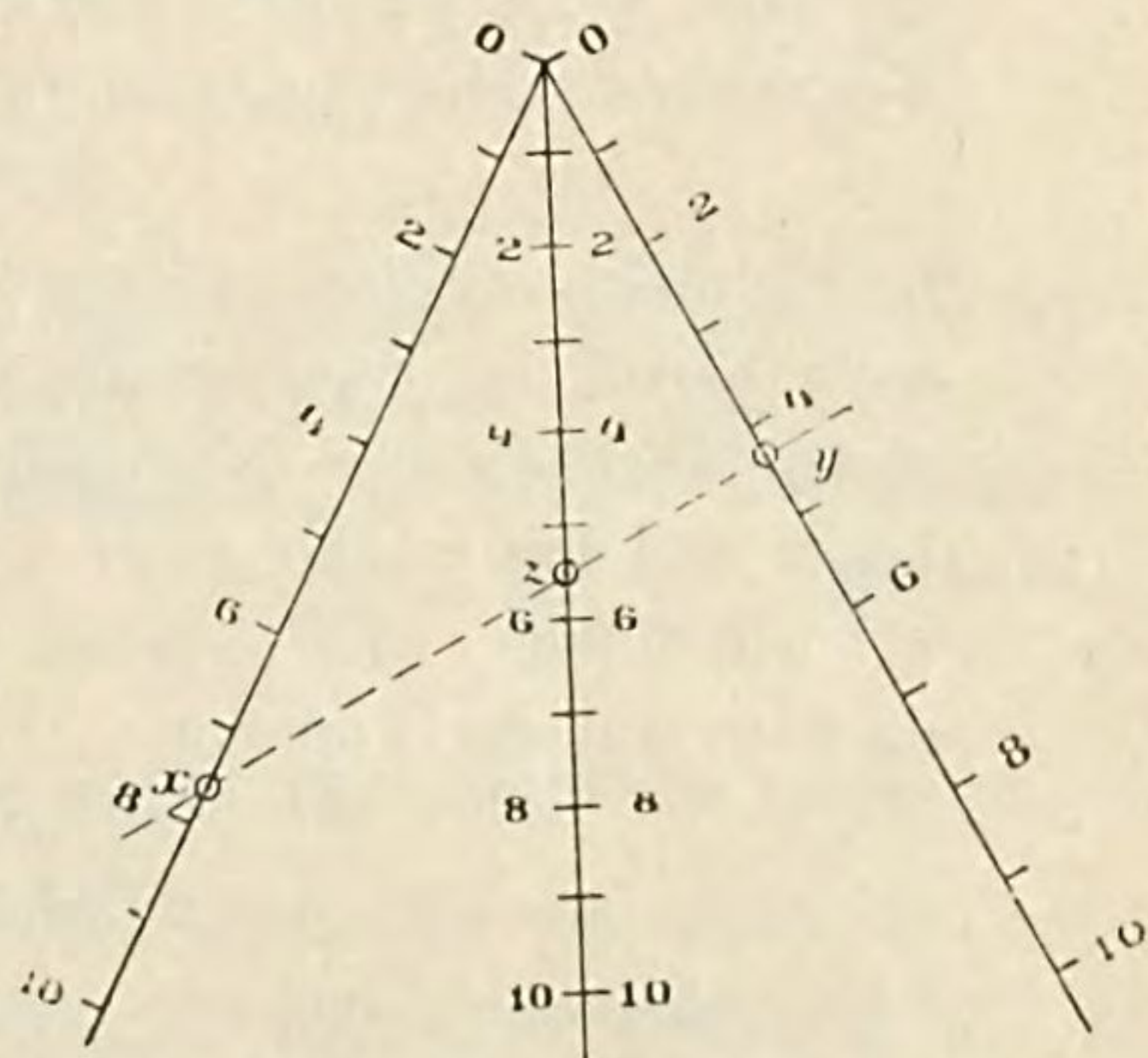
katalog beschriebenen Abacus nach der Methode der Isoplethenpunkte. Auf der linken Seite des Abacus befindet sich der Masstab, welcher die Höhe y des Erddammes in der Mittellinie angibt, auf der rechten Seite der Masstab x für die Neigung des Terrains, in der Mitte der Masstab für die Querschnittsfläche der auf- beziehungsweise abzutragenden Erdmasse: $C = y^2 : 2x$. Die Ablesung geschieht dadurch, dass man mittels einer Geraden die entsprechenden Punkte der beiden Masstäbe x und y verbindet und auf dem Masstabe C abliest.

44b. Verschiedene graphische Tafeln, von Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt.

Die meisten dieser Tafeln sind Anwendungen der, wie es scheint, von *Kutter*, (1869) herrührenden Methode, welche Herr *M. d'Ocagne* in seinem 1891 erschienenen Buche mit dem Titel „Nomographie“ die Methode der „isoplethen Punkte“ genannt hat (vergl. die Tafel zur Geschwindigkeitsformel von *Kutter*, Nr. 43 a S. 17). Sie wurden (mit einer Reihe anderer, unausgeführt gebliebener) im Jahre 1889 entworfen; zwei davon (die „Barometertafel“ und die Tafel zur Bestimmung der Leistungen von Locomotiven) sind 1890 in Zeitschriften veröffentlicht worden. Einige der Tafeln wurden vom Verfasser bei zahlen-theoretischen Untersuchungen benützt.

Es sind behandelt:

1) Das harmonische Mittel. Drei von einem Punkt ausgehende Axen (s. die Fig.) sind gleichmässig geteilt, aber so, dass gleichbezahlte Teilpunkte in einer Geraden liegen. Um das harmonische Mittel z zweier Grössen x und y zu finden, sucht man die entsprechenden Punkte auf den äusseren Axen, verbindet durch eine Gerade und liest am Schnittpunkt mit der dritten Axe ab.



2) Das geometrische Mittel zweier Grössen.

3) Die Correction des Barometerstandes, die bei der Reduction auf 0° wegen der Temperatúrausdehnung des Quecksilbers und des Massstabes nötig ist (abgedruckt in Wiedemann's Annalen für Physik, 1890.)

4) Die sog. rohen Seehöhen, für Lufttemperatur corrigirt (für barometrische Höhenmessungen).

5) Die Helligkeit eines wagerechten, durch eine Lichtquelle von 100 Normalkerzen beleuchteten Flächenelementes.

6) Druck, Volumen und Temperatur eines Kilogramms atmosphärischer Luft bei isothermischer und adiabatischer Zustandsänderung.

7) Die Bestimmung des Rohrdurchmessers und der Ausflussgeschwindigkeit einer Wasserleitung bei gegebenem Gefäll und vorgeschriebener Wassermenge.

8) Die Bestimmung der Stauhöhe eines durch Brückenpfeiler gestauten Flusses.

9) Die Bestimmung der Flächeninhalte von Querprofilen.

10) Die Ermittlung des Kohlen- und Wasserverbrauchs, der Zugkraft, Geschwindigkeit u. s. w. einer Normal-Güterzug-Locomotive, wenn eine jener Grössen gegeben ist (abgedruckt im Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 1890).

11) — 13) Die Bestimmung der Normen von Zahlen reiner cubischer Zahlkörper und die Prüfung, ob solche Zahlen Einheiten sind. (Mehmke.)

44c. Tafeln zur graphischen Berechnung homogener Functionen von zwei Veränderlichen, von Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt.

Ist $z = f(x, y)$ irgend eine, in Bezug auf x und y homogene Function vom Grade n , so hat man

$$z = x^n \cdot f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

oder wenn

$$\log \frac{y}{x} = \log y - \log x = u, \quad \log f\left(1, \frac{y}{x}\right) = v$$

gesetzt wird,

$$\log z = n \cdot \log x + v.$$

Es kann v als Function von u betrachtet und die zwischen beiden Grössen bestehende Abhängigkeit durch die Gleichung

$$10^v = f(1, 10^u)$$

ausgedrückt werden. Sobald für diese Function eine numerische Tabelle berechnet oder dieselbe geometrisch durch eine Curve oder auch durch einen Mechanismus dargestellt ist, lässt sich zu beliebigen Werten von $\log x$ und $\log y$ oder auch x und y der zugehörige Wert von $\log z$ oder z leicht finden. Es ergeben sich z. B. aus der Anwendung dieses Gedankens auf die Function

$$z = x + y$$

einerseits die sog. Additionslogarithmen, andererseits die vom Verfasser in das graphische Rechnen eingeführte „Additionscurve“, wie auch Prof. Brauer's logarithmischer Zirkel (vergl. Nr. 97a). Die Ausdehnung der Methode auf homogene Functionen von drei reellen oder zwei complexen Veränderlichen würde numerische oder graphische Tafeln mit zwei Eingängen bzw. Hilfsflächen erfordern. Ein Beispiel der letzteren Art haben wir in den „Additionslogarithmen für complexe Grössen“ (vergl. Nr. 50a).

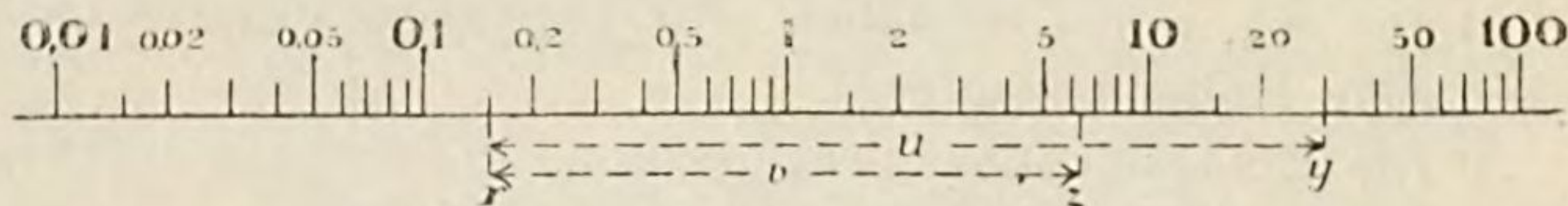


Fig. 1.

Die ausgestellten Tafeln behandeln folgende Beispiele:

- 1) Arithmetisch-geometrisches Mittel $z = M(x, y)$;
- 2) Modul r und Amplitude φ einer complexen Grösse $(x + iy)$.
- 3) Wurzeln einer quadratischen Gleichung $z^2 + az + b = 0$. (Es ist der Umstand benützt, dass die Wurzeln homogene Functionen von a und $\sqrt{b}$ sind.)

Eine Anleitung zum Gebrauch findet man auf den betreffenden Tafeln selbst. Es möge aber zur deutlicheren Erklärung der Methode wenigstens das erste Beispiel hier noch besprochen werden.

Da $z = M(x, y)$ eine homogene Function ersten Grades von x und y ist, so wird

$$\log z = \log x + v \quad (u = \log y - \log x).$$

Die Tafel enthält eine (von 0,01 bis 100 gehende) logarithmische Teilung (Fig. 1) und eine in demselben Massstab ($1 = 5\text{cm}$) gezeichnete Hilfscurve (Fig. 2), deren Punkte zur Abscisse u , zur Ordinate $v = \log M(1, 10^u)$ haben.

Es ist jetzt offenbar so zu verfahren: Man sucht auf der logarithmischen Teilung die zu den gegebenen Werten von x und y gehörigen Punkte, misst mit einem Zirkel die Strecke u vom ersten Punkte nach dem zweiten, bestimmt zu dieser Strecke als Abscisse die zugehörige Ordinate v der Hilfscurve und trägt dieselbe vom Punkt x aus in positiver Richtung auf der logarith-

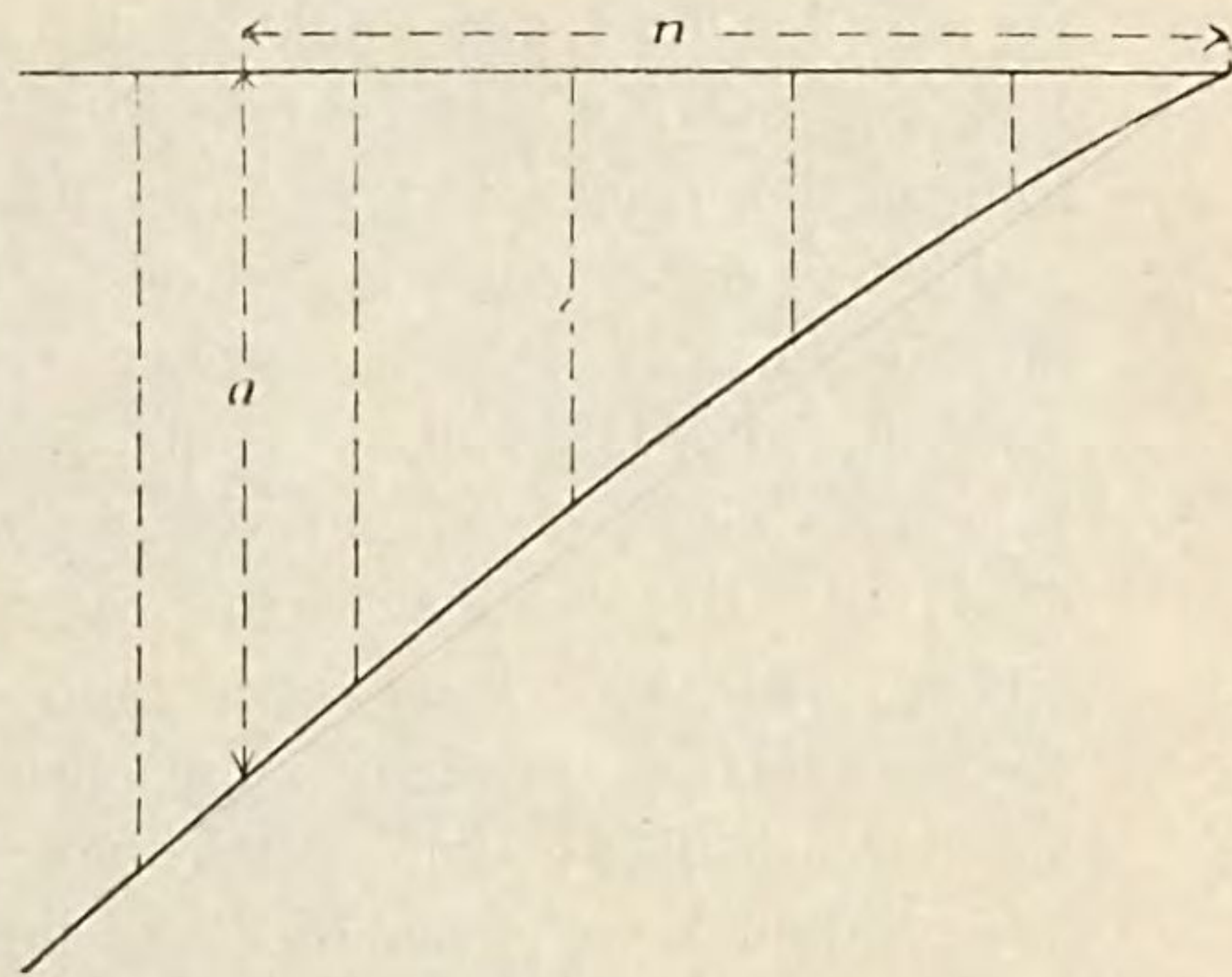


Fig. 2.

mischen Teilung ab, dann lässt sich am Endpunkt das gesuchte arithmetisch-geometrische Mittel von x und y ablesen. (Weil $M(x, y) = M(y, x)$, so durfte man $x < y$ voraussetzen, d. h. sich auf positive u beschränken.) (Mehmke.)

44d. Entwurf einer logarithmischen Rechentafel für complexe Grössen, von Prof. Mehmke, techn. Hochschule Darmstadt.

Den aus dem Jahre 1620 stammenden Gedanken Gunter's, die Logarithmen als Strecken in einer Linie von einem und demselben Punkt aus abzutragen, auf dem alle logarithmischen Rechenapparate (Rechenstäbe, Rechenscheiben u. s. w.) beruhen, findet man hier durch Einführung complexer Grössen verallgemeinert. Mittels desjenigen Zweiges der Function $\log(x + iy)$, bei welchem der imaginäre Teil immer zwischen 0 und $2i\pi$ liegt, sind eine Anzahl von Parallelen zur x - und y -Axe abgebildet worden, und zwar soweit sie innerhalb des ringförmigen Streifens der Zahlenebene verlaufen, der durch die beiden, aus dem Nullpunkte mit den Halbmessern 1 und 10 beschriebenen Kreise begrenzt ist. Um der Tafel in der y -Richtung keine zu grosse Ausdehnung geben zu müssen, hat man noch eine affine Transformation mit ihr vorgenommen, oder kürzer gesprochen, man hat die imaginären Teile der Logarithmen in einem kleineren Massstabe, als die reellen, aufgetragen. An die erhaltenen Curven sind die betreffenden Werte von x bzw. y angeschrieben worden.

Sind nun vier complexe Grössen

$$z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_4 = x_4 + iy_4$$

vorhanden, die in der Beziehung

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_3}{z_4}$$

stehen, und suchen wir in unserer Tafel die zugehörigen Punkte, so ist offenbar die Strecke vom Punkte z_1 (d. h. dem Schnittpunkte der Curven $x = x_1$ und $y = y_1$) nach dem Punkte z_2 gleich lang und gleich gerichtet mit der Strecke vom Punkte z_3 nach dem Punkte z_4 . Um daher z. B.

$$z = \frac{a}{b}c$$

zu finden, wenn die complexen Grössen a , b , c gegeben sind, verschiebe man in der Tafel den Punkt c um eine Strecke, die gleiche Länge und Richtung mit der Strecke vom Punkte b nach dem Punkt a hat, dann lässt sich an den beiden Curven, die durch den erhaltenen Punkt gehen, der reelle und der imaginäre Teil der gesuchten Grösse z ablesen. Die Multiplication und die Division zweier complexen Grössen sind hierin als besondere Fälle enthalten. Behufs mechanischer Ausführung jener Operation kann man einen Zirkel mit vier Spitzen anwenden, der so eingerichtet ist, dass bei jeder Stellung seine Spitzen die Ecken eines Parallelogrammes bilden, oder aber kann man, um die Analogie mit dem gewöhnlichen Rechenschieber vollständig zu machen, eine mit der ersten Tafel congruente, auf durchsichtigen Stoff gezeichnete Tafel benützen. Man braucht dann diese Tafeln bei gleicher Richtung ihrer Axen nur so auf einander zu legen, dass der zur complexen Grösse b gehörige Punkt der oberen Tafel den Punkt a der unteren Tafel deckt, dann wird man unter dem Punkte c der oberen Tafel die gesuchte Grösse z finden.

In dem ausgestellten Entwurfe sind die den reellen Teilen der complexen Grössen entsprechenden Curven und Ziffern schwarz, die den imaginären Teilen entsprechenden rot gezeichnet.

Um beim Rechnen nicht zu häufig aus dem Bereich der Tafel herauszukommen, wäre bei einer zum wirklichen Gebrauch bestimmten Ausführung eine Wiederholung der Tafel zweckmässig, ähnlich der Wiederholung der Scalen beim Rechenschieber. Für den Gebrauch noch bequemer wäre die cylindrische (den Rechenscheiben u. s. w. entsprechende) Form: durchsichtiger Hohlcyllinder mit darin verschieb- und drehbarem Volleylinder.

(Mehmke.)

44e. Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, sowie sechs graphische Tafeln hiezu von Prof. **Ch. A. Vogler**, Berlin. Ausgestellt von der Verlagsbuchhandlung von **Ernst und Korn**, Berlin.

Inhalt: I. Vom Entwerfen graphischer Tafeln und deren Leistung gegenüber den Rechenmaschinen. II. und III. Verwendung von Schichtentafeln bei Aneroid-Messungen und in der Tachymetrie.

44f. Graphische Barometertafeln zur Bestimmung der Höhenunterschiede durch eine blosse Subtraction. Von Prof. **Ch. A. Vogler**, entworfen von **H. Feld**. Ausgestellt von der Verlagsbuchhandlung von **Vieweg & Sohn**, Braunschweig.

D. Modelle und Zeichnungen zur Algebra und Functionentheorie.

46a. Geometrische Darstellung der Discriminante der Hauptgleichung fünften Grades. G. Kerschensteiner, Gymnasiallehrer in Schweinfurt.

Die Hauptgleichung fünften Grades (vergl. Klein, Ikosaeder, Seite 182)

$$G_5 \equiv x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0 \quad (\text{I})$$

hat als Discriminante folgenden Ausdruck (vergl. Faà di Bruno, übersetzt von Walter, Seite 317):

$$\Delta_5 \equiv 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4$$

Die Fläche, welche dieser gleich Null gesetzte Ausdruck darstellt, besitzt notwendig eine Rückkehrkante als Ort aller Punkte $\alpha\beta\gamma$, für welche $G_5 = 0$ eine Gleichung mit einer dreifachen Wurzel darstellt, ferner eine Doppelcurve als Ort aller Punkte $\alpha\beta\gamma$, für welche $G_5 = 0$ eine Gleichung mit zwei Paar gleichen Wurzeln repräsentirt. Weitere singuläre Curven sind ausgeschlossen, da $G_5 = 0$ nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ vier- oder fünf-fache Wurzeln erhalten kann.

Die analytischen Ausdrücke für die Doppelcurve bzw. Rückkehrkante erhält man daher, wenn man die speziellen Gleichungen

$$G'_5 \equiv (x - \mu)^3(x - \rho)(x - \lambda) = 0$$

$$G''_5 \equiv (x - \mu)(x - \rho)^2(x - \lambda)^2 = 0$$

mit der Hauptgleichung (I) compariert. Man findet auf diese Weise als Gleichung der Rückkehrkante (wobei der Parameter μ der Wert der dreifachen Wurzel ist):

$$\begin{aligned} \alpha &= -2\mu^3 \\ \beta &= +3\mu^4 \\ \gamma &= -6\mu^5 \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Sie ist also eine Raumcurve, von deren Verlauf man sich in einfacher Weise ein geometrisches Bild verschafft, wenn man sie sich als Schnitt der beiden Cylinder vorstellt

$$16\beta^3 - 27\alpha^4 = 0, \quad 16\beta^5 - 3\gamma^4 = 0,$$

deren erster eine Curve vom Typus einer gewöhnlichen Parabel, deren zweiter eine Curve vom Typus einer Neil'schen Parabel zum Querschnitt hat.

Ebenso erhält man als Gleichung der Doppelcurve:

$$\begin{aligned} \alpha &= +(\rho + \lambda)^3 = k^3 \\ \beta &= -\frac{3}{4}(\rho + \lambda)^4 = -\frac{3}{4}k^4 \\ \gamma &= +\frac{9}{2}(\rho + \lambda)^5 = \frac{9}{2}k^5, \end{aligned} \quad (\text{III})$$

eine Raumcurve, welche sich als Schnitt der beiden Cylinder ergibt:

$$27\alpha^4 + 64\beta^3 = 0, \quad 12^3\beta^5 + \gamma^4 = 0.$$

Es erübrigt nur noch, den Verlauf der Doppelcurve auf der Fläche zu untersuchen.

Zu dem Zwecke denke ich mir in der Flächengleichung $\Delta_5 = 0$ die Abscisse α einen Moment als Parameter; dann stellt $\Delta_5 = 0$ die Gesamtheit aller Curven dar, nach welchen der Parallelebenenbüschel $\alpha' = \text{Const.}$ die Discriminantenfläche schneidet. Für einen Doppelpunkt $\beta' \gamma'$ dieser Curven bestimmen sich die beiden Tangenten aus der Gleichung

$$\left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \beta^2}\right] + \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right) \cdot \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \beta \partial \gamma}\right] + \left[\frac{\partial^2 \Delta}{\partial \gamma^2}\right] = 0.$$

Setzt man in die Coefficienten dieser Gleichung für α , β , γ die Werte ein welche den Gleichungen (III) genügen, so erhält man

$$4 \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + 210 k \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right) + 150 k^2 = 0.$$

Die Discriminante dieser quadratischen Gleichung

$$a_0 a_2 - a_1^2 = 600 k^2 - 100 k^2 = + 500 k^2$$

ist aber positiv, für reelle Werte von k , d. h. der Doppelpunkt der Curve ist isolirt, und damit die ganze Doppelcurve der Fläche $\Delta_5 = 0$.

Dann aber teilt die Fläche $\Delta_5 = 0$ den Raum überhaupt nur in zwei Teile, und die vorliegende Hauptgleichung kann niemals fünf reelle Wurzeln besitzen.

In der That, sind x_1 x_2 x_3 irgend drei reelle Wurzeln der Gleichung, so müssen x_4 und x_5 , weil die Coefficienten der vierten und dritten Potenz in der Hauptgleichung Null sind, den Bedingungen genügen:

$$x_4 + x_5 = -(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_4 x_5 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3)$$

d. h. die Werte der beiden andern Wurzeln ergeben sich aus einer quadratischen Gleichung, die nur imaginäre Wurzeln besitzen kann. Denn ihre Discriminante wird nur dann negativ, wenn

$$-2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) > 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

ist. Das ist aber unmöglich; denn es ist offenbar stets:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

also sicher

$$3(a^2 + b^2 + c^2) > -2(ab + bc + ca)$$

Die Fläche $\Delta_5 = 0$ teilt also den Raum in 2 Teile; sie hat völlig die Gestalt der Fläche $\Delta_3 = 0$ (vergl. Katalog, 1892 Seite 169) und der dort mit I bezeichnete Raum enthält alle Punkte, welche Gleichungen mit 1 reellen und 4 complexen, während der Raum II Gleichungen mit 3 reellen und 2 complexen Wurzeln liefert. Analytisch ausgedrückt hat man für die Hauptgleichung:

$$G_5 = x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0$$

gemäss den vorausgehenden Untersuchungen die folgenden äusserst einfachen Kriterien:

Wurzeln:	Δ	$8\beta^2 - \alpha\gamma$	$27\beta\alpha^2 + \gamma^2$	$4\beta^2 - 3\alpha\gamma$	$\gamma^2 - 3\alpha^2\beta$
1 reelle	+				
3 reelle	-				
Eine dreifache . .	0			0	0
Zwei Paar gleiche	0	0	0		

Es mag bemerkt werden, dass auch für die beiden letzten Fälle zwei der Kriterien genügen, und dass $\gamma^2 - 3\alpha^2\beta$ nichts anderes ist, als die Invariante

A und $4\beta^2 - 3\alpha\gamma$ bis auf den Factor $4\alpha^2$ der Coefficient von x^2 der Co-variante τ der Form fünften Grades. Die hier von mir angegebenen Kriterien für zwei Paar gleiche Wurzeln lassen sich dagegen nicht in einfacher Weise mit Formen des Systems von G_5 identificieren.

Anmerkung: Herr Schoute hat darauf hingewiesen, (vergl. Gewone Vergadering der Afdeeling Natuurkunde op Zaterdag 27. Mei 1893, Accademie in Groningen), dass die von mir bereits im Vorjahr discutirten Discriminantenflächen abwickelbare Flächen sind, eine Bemerkung, die sich [Vergl. auch den Aufsatz von Herrn Professor Klein: Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen (Katalog 92)] direkt aus der Ueberlegung ergibt, dass die Discriminante auch als Resultante der ersten Differentialquotienten der Form dargestellt werden kann. Durch Beachtung dieser Eigenschaft wird zwar die Discussion der Fläche nicht einfacher; auch wird dadurch die algebraische Seite der Frage nicht berührt; wohl aber gestattet sie eine ganz exacte Herstellung der Fläche durch Fadenmodelle: ich habe daher auch das vorliegende Modell als Fadenmodell ausgeführt, dabei aber die β -Coordinate auf den 12. und die γ -Coordinate auf den 120. Teil verkürzt. —

(G. Kerschensteiner.)

46b. Drei Fadenmodelle von entwickelbaren Flächen, die mit algebraischen Gleichungen höheren Grades in Verbindung stehen, von Professor P. H. Schoute, Universität Groningen.

Modell I. Betrachtet man nach Sylvester und Kronecker die Coefficienten x, y, z der Gleichung $u^3 + 3xu^2 + 3yu + z = 0$ als Coordinaten eines Punktes P und denkt man sich in jedem Punkte P die drei Wurzeln der Gleichung angegeben, so wird der Raum bekanntlich von einer Fläche in zwei Teile geteilt, von denen der eine die Punkte mit drei reellen Wurzeln enthält, während in jedem Punkte der andern nur eine Wurzel reell ist. Für jeden Punkt der Fläche werden dann zwei Wurzeln einander gleich sein.

Die Bedingung, die Gleichung in u enthalte eine zweifache Wurzel, wird durch Elimination von u aus

$$\left. \begin{array}{l} u^2 + 2xu + y = 0 \\ xu^2 + 2yu + z = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

erhalten. Betrachtet man u als eine bekannte Grösse, dann gehören die Gleichungen 1) einer bestimmten Geraden an. Die gesuchte Fläche ist deshalb der Ort der den verschiedenen Werten von u entsprechenden Geraden 1). Ausserdem begegnet die dem Werte u entsprechende Gerade der ihr unmittelbar folgenden in dem Punkte

$$\left. \begin{array}{l} u + x = 0 \\ xu + y = 0 \\ yu + z = 0 \end{array} \right\}, \quad \text{d. h.} \quad \left. \begin{array}{l} x = -u \\ y = u^2 \\ z = -u^3 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2).$$

Desshalb ist die Fläche entwickelbar und die cubische Raumcurve, welche der Ort des Punktes 2) bildet, ihre Rückkehrlinie. Für jeden Punkt dieser Curve sind die drei Wurzeln einander gleich.

Schreibt man die Gleichungen 1) in der Form

$$\left. \begin{array}{l} y = -u(u + 2x) \\ z = u(2u - 3x) \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

und nimmt man zwei bestimmte Ebenen senkrecht zur x-Axe an, z. B. $x = -10$ und $x = +10$, so findet man für die Schnittpunkte mit diesen Ebenen

$$\left. \begin{array}{l} y = -u(u-20) \\ z = u^2(u+30) \end{array} \right\} , \quad \left. \begin{array}{l} y = -u(u+20) \\ z = u^2(u-30) \end{array} \right\} .$$

Zeichnet man nun auf zwei einander gegenüberstehenden Ebenen eines Würfels von Pappendeckel, welcher so mit dem Coordinatensysteme in Verbindung gebracht ist, dass diese Ebenen den Gleichungen $x = -10$, $x = +10$ entsprechen, die Punkte (y, z) , welche man erhält, wenn man in die letzten Gleichungen für u nach einander die Werte $-10, -9, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9, 10$ einsetzt, und verbindet dann je die Punkte, welche dem nämlichen Werte von u entsprechen, so entsteht das gesuchte Modell.

Modell II. Das zweite Modell entspricht der Gleichung $u^4 + 6xu^2 + 4yu + z = 0$. Es teilt den Raum in drei Teile, deren Punkte entweder vier, zwei oder keine reellen Wurzeln zeigen. Es muss die Fläche also sich selbst durchsetzen und deshalb eine Doppellinie besitzen. Es ist die Generatrix

$$\left. \begin{array}{l} u^3 + 3xu + y = 0 \\ 3xu^2 + 3yu + z = 0 \end{array} \right\}, \quad \text{d. h.} \quad \left. \begin{array}{l} y = -u(u^2 + 3x) \\ z = 3u^2(u^2 + 2x) \end{array} \right\}$$

und die Rückkehrlinie

$$\left. \begin{array}{l} u^2 + x = 0 \\ 2xu + y = 0 \\ xu^2 + 2yu + z = 0 \end{array} \right\}, \quad \text{d. h.} \quad \left. \begin{array}{l} x = -u^2 \\ y = 2u^3 \\ z = -3u^4 \end{array} \right\} .$$

Für jeden Punkt der Doppellinie hat die Gleichung zwei Paar gleiche Wurzeln und ist das erste Glied das Quadrat von $u^2 + 3x$. Deshalb ist die Parabel $y = 0$, $z = 9x^2$ die Doppellinie; nur die mit negativen Werten von x auftretende Hälfte ist Ort von Knotenpunkten; die Paare von Generatrices, welche sich auf der anderen Hälfte begegnen, sind imaginär.

Es sind hier die Ebenen $x = -16$, $x = 4$ verwendet.

Modell III. Wenn man untersuchen will, welche Form die Fläche annimmt bei einer Teilung des Raumes in vier Gebiete, so kann man sich der Gleichung $u^6 - 15u^4 + 15xu^2 + 6yu + z = 0$ bedienen. Es ist die Generatrix

$$y = -u(u^4 - 10u^2 + 5x), \quad z = 5u^2(u^4 - 9u^2 + 3x)$$

und zur Construction sind die Ebenen $x = -2$, $x = 10$ verwendet worden. Jedenfalls ist ebenso wie beim zweiten Modell der Boden des Würfels auch benützt. Die Rückkehrlinie ist

$$x = -u^2(u^2 - 6), \quad y = 4u^3(u^2 - 5), \quad z = -5u^4(2u^2 - 9)$$

und die Doppellinie besteht aus zwei Teilen. Auf dem einen, der rationalen ebenen Curve $y = 0$, $(z + 25x)^2 + 100(x - 5)(z + 5x^2) = 0$ mit dem Rückkehrpunkte $x = 5$, $z = -125$ (Rückkehrtangente $z + 75x = 250$) tritt die Realität der beiden durch den Doppelpunkt gehenden Generatrices in den beiden Fällen $x > 0$ und $x < 0$, $z < 0$ ein. Auf dem anderen, der rationalen Raumcurve

$9x = 16v^4 - 36v^2 + 45$, $9y = 2v^3(8v^2 - 15)$, $27z = 5(4v^2 - 3)(8v^2 - 15)^2$, deren Parameter v mittelst der Gleichung $3u^2 - 6uv + 8v^2 = 15$ mit u verknüpft ist, tritt die Realität der beiden durch den Doppelpunkt gehenden Generatrices nur unter der Bedingung $v^2 \leq 3$ ein.

Die Durchschnitte der Fläche mit den Ebenen $x = \text{Const.}$ sind rationale Curven sechster Ordnung und sechster Classe mit vier Rückkehrpunkten

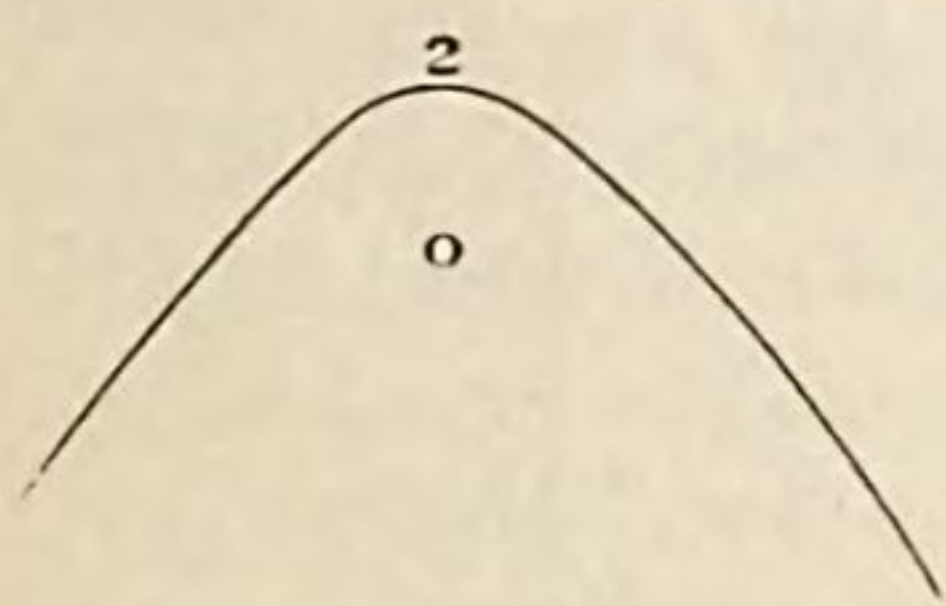


Fig. 1.

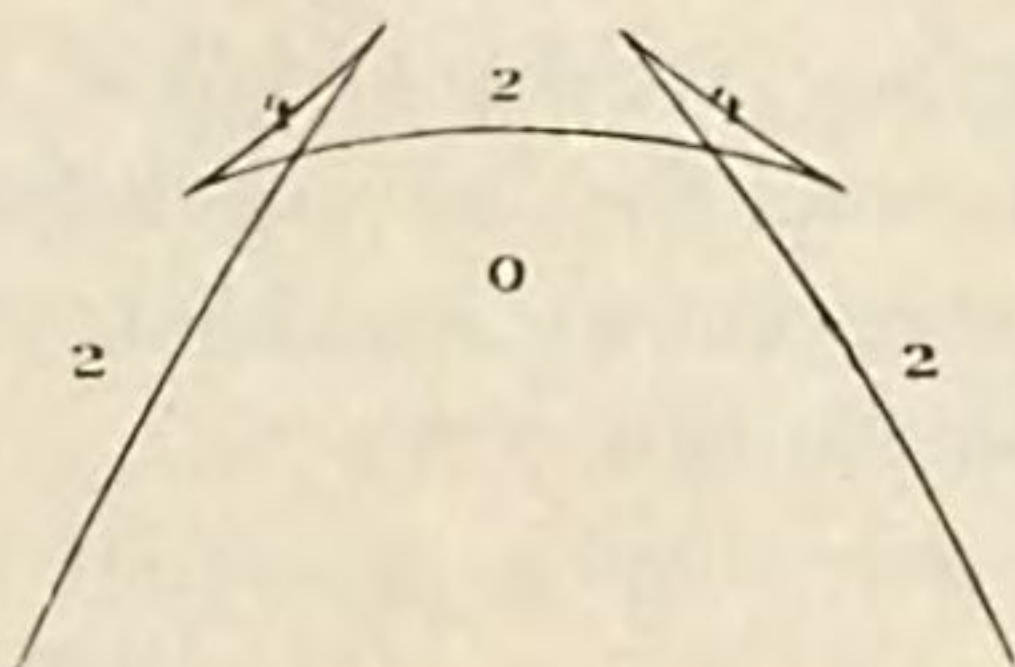


Fig. 2.

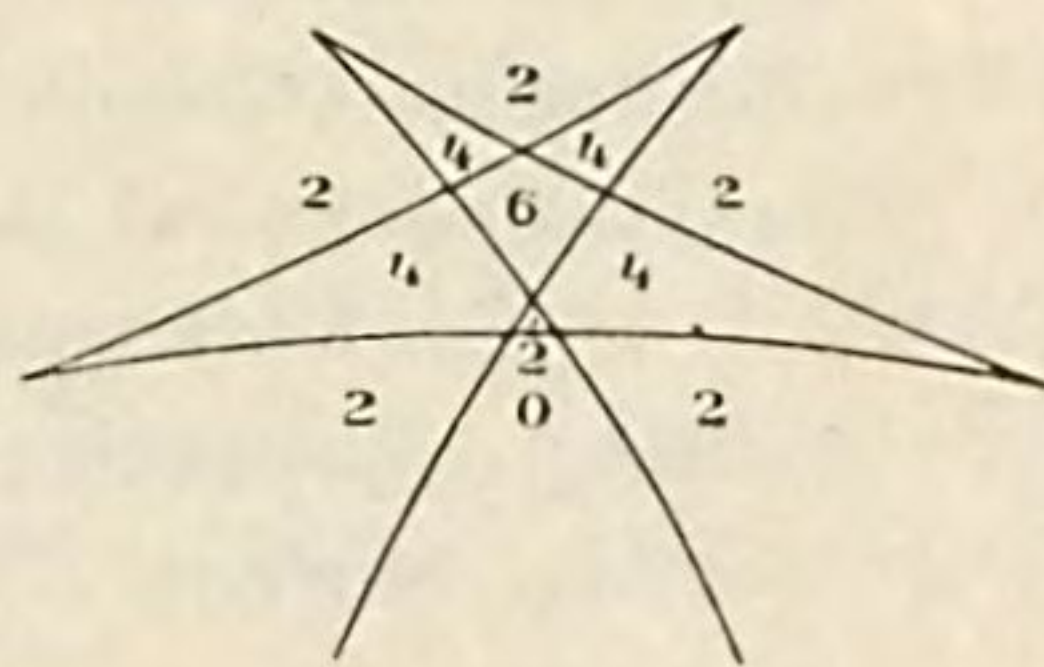


Fig. 3.

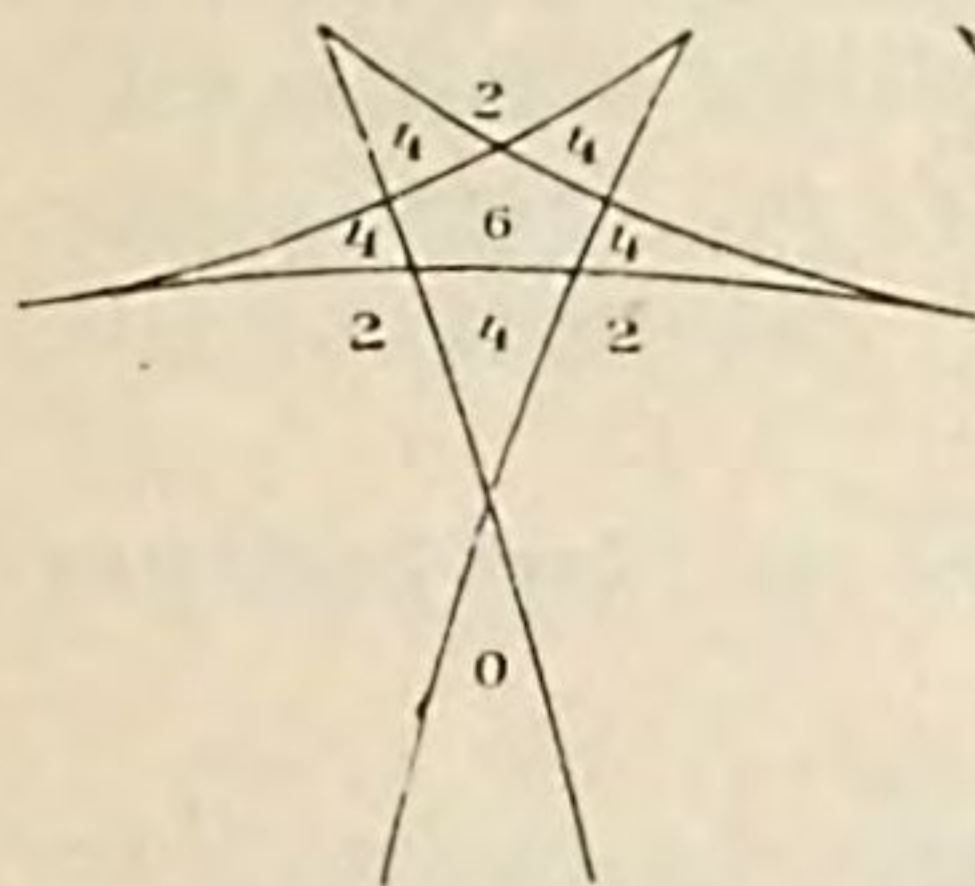


Fig. 4.

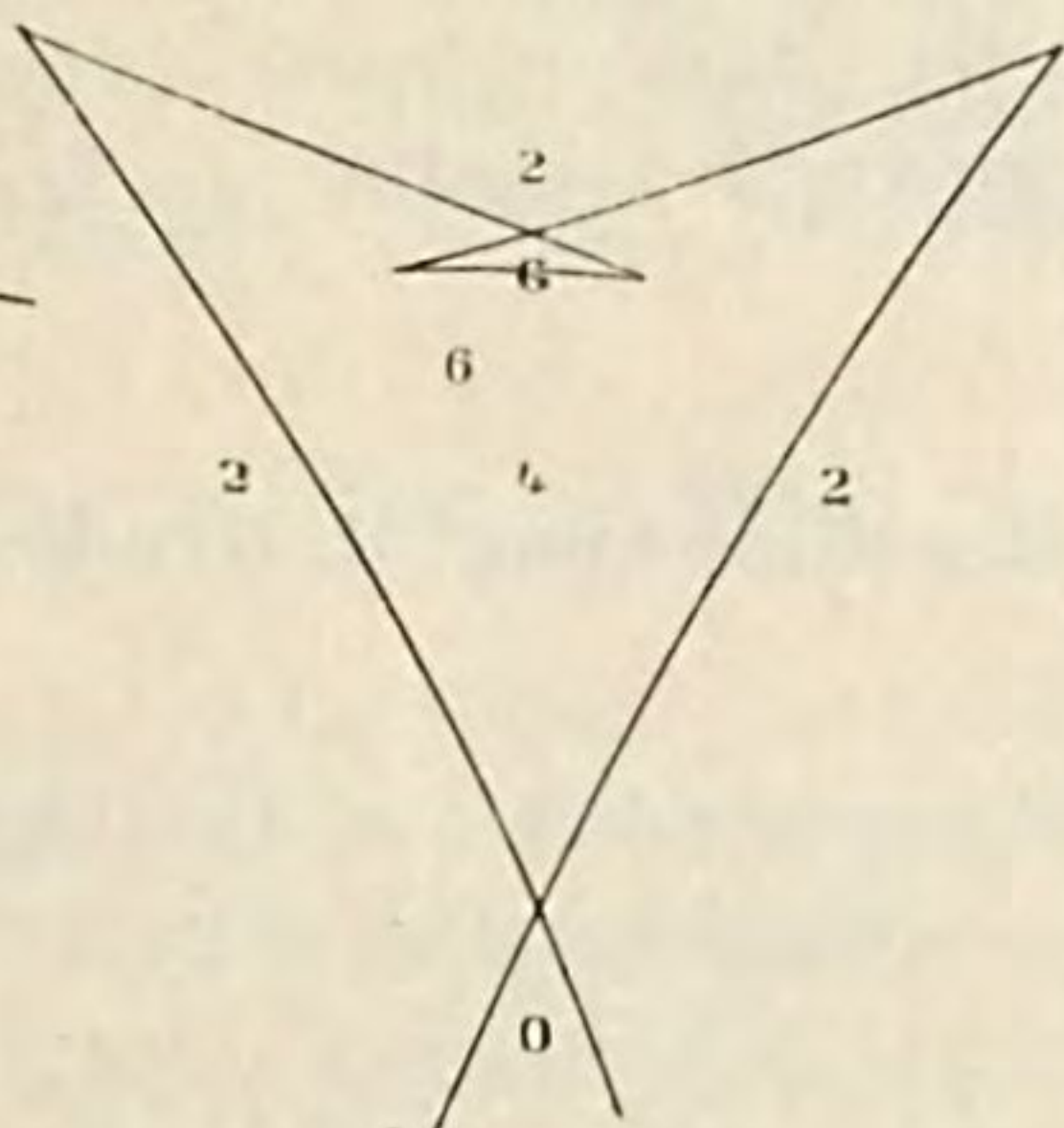


Fig. 5.

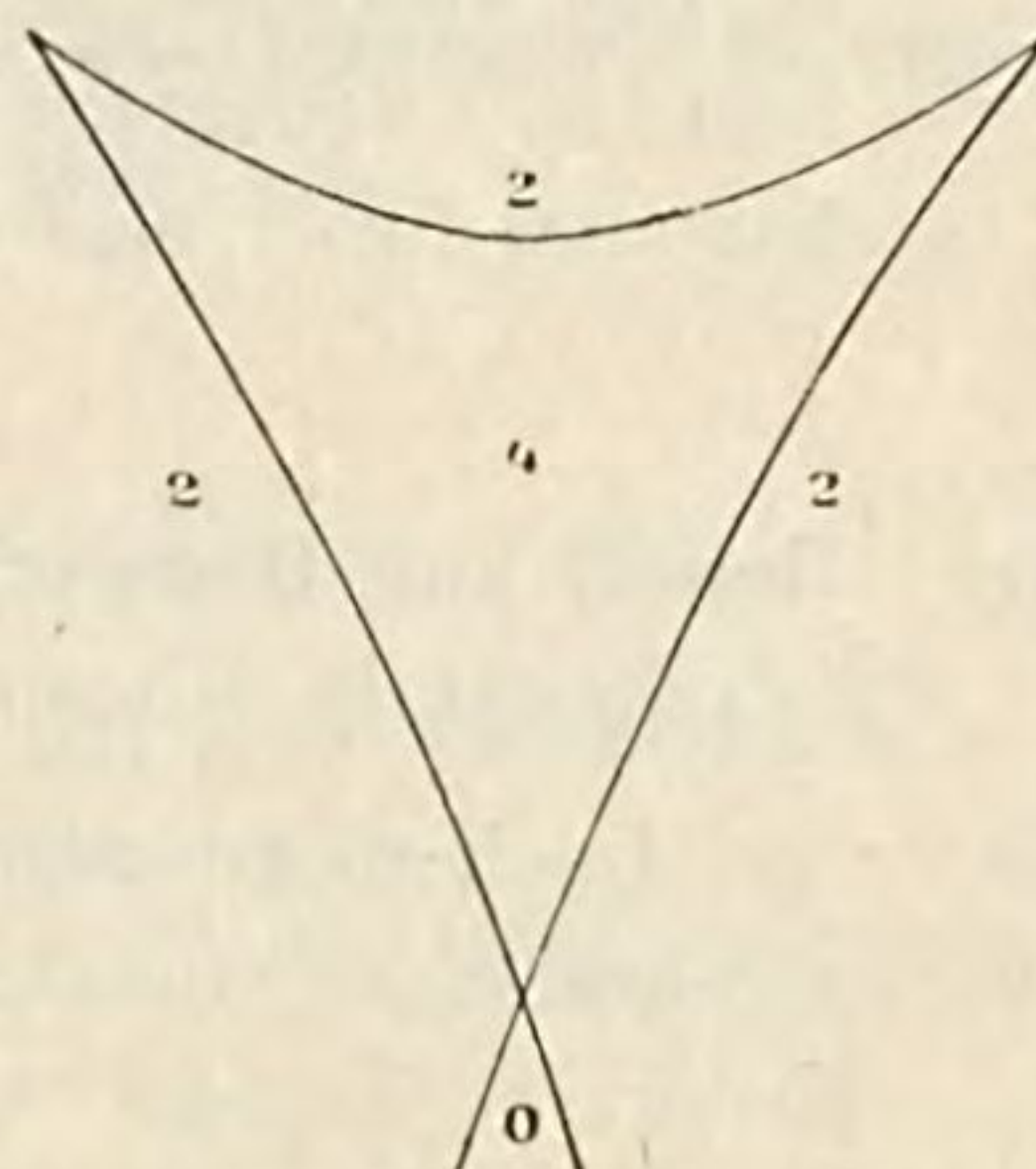


Fig. 6.

und sechs Doppelpunkten. Die Figurentafel zeigt, wie die Form des Durchschnittees sich ändert von $x = -2$ (Fig. 1) bis $x = 10$ (Fig. 6). In einigen der Uebergangsformen (Fig. 3 und Fig. 4) sind die Rückkehrpunkte und Doppelpunkte sämtlich reell. Die hinzugefügten Ziffern geben die Zahl der reellen Wurzeln an. Dabei ist folgendes zu beachten. Wenn man die Curve durchsetzt, ändert sich die Zahl der reellen Wurzeln um zwei. Geht man von der concaven Seite nach der convexen Seite über, so hat eine Zunahme, geht man in entgegengesetzter Richtung, so hat eine Abnahme der reellen Wurzeln um zwei statt. Beim stetigen Durchgang eines Doppelpunktes bleibt die Zahl der reellen Wurzeln ungeändert beim Uebergang von concav-convexer Seite nach convex-concaver Seite und ändert sich die Zahl um vier beim anderen Uebergang.

Die drei Punkte der Fläche, wo die Rückkehrlinie einen Rückkehrpunkt hat, sind sehr merkwürdig. Es entstehen dort die Hörner von Fig. 2 und Fig. 5.

Bemerkungen.

1. Im ersten Modelle beziehen sich die verschieden gefärbten Drähte auf ein Osculationstetraeder, das bei der Bestimmung der Zahl der Wurzeln zwischen gegebenen Grenzen in Betracht kommt. Es kann ein solches Tetraeder bei jedem Modelle angebracht werden.

2. Im Falle einer Gleichung n ten Grades, von welcher man in ähnlicher Weise drei Coefficienten x, y, z sich ändern lässt, findet man eine entwickelbare Fläche, welche mit einer Ebene senkrecht zur x -Axe eine rationale Curve n ter Ordnung und n ter Classe mit $n - 2$ Rückkehrpunkten und $\frac{1}{2}(n - 2)(n - 3)$ Doppelpunkten gemein hat.

3. Bei einer vollständigen Gleichung n ten Grades handelt es sich um die „Discriminantenmannigfaltigkeit“ und die mit ihr in nächster Beziehung stehende rationale Curve des Raumes von n -Dimensionen (man sehe die einleitende Abhandlung des Katalogs). Weil es mir um die Darstellung durch Modelle zu thun war, sind unvollständige Gleichungen betrachtet.

4. Es bildet das Centimeter die Längeneinheit. Jedoch ist zur Erhaltung einer geeigneten Grösse

im Modelle I: $x = x_1$, $y = 20y_1$, $z = 400z_1$,

„ „ II: $x = x_1$, $y = 12\frac{1}{2}y_1$, $z = 100z_1$,

„ „ III: $x = \frac{3}{5}x_1$, $y = 10y_1$, $z = 60z_1$,

gesetzt und sind x_1, y_1, z_1 bei der Construction verwendet. Ausserdem ist in den Modellen II und III die positive z -Axe nach unten gerichtet und sind die Bodenebenen respective $z_1 = 12$ und $z_1 = 7,5$. Im Modelle III hat man für u nach einander $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots \frac{25}{10}, \frac{51}{20}, \frac{26}{10} \dots \frac{61}{20}, \frac{32}{10}$ gesetzt.

(P. H. Schoute.)

46c. Modell zur Discussion der Gleichung 3. Grades von **Karl Doehlemann**
Privatdocent in München.

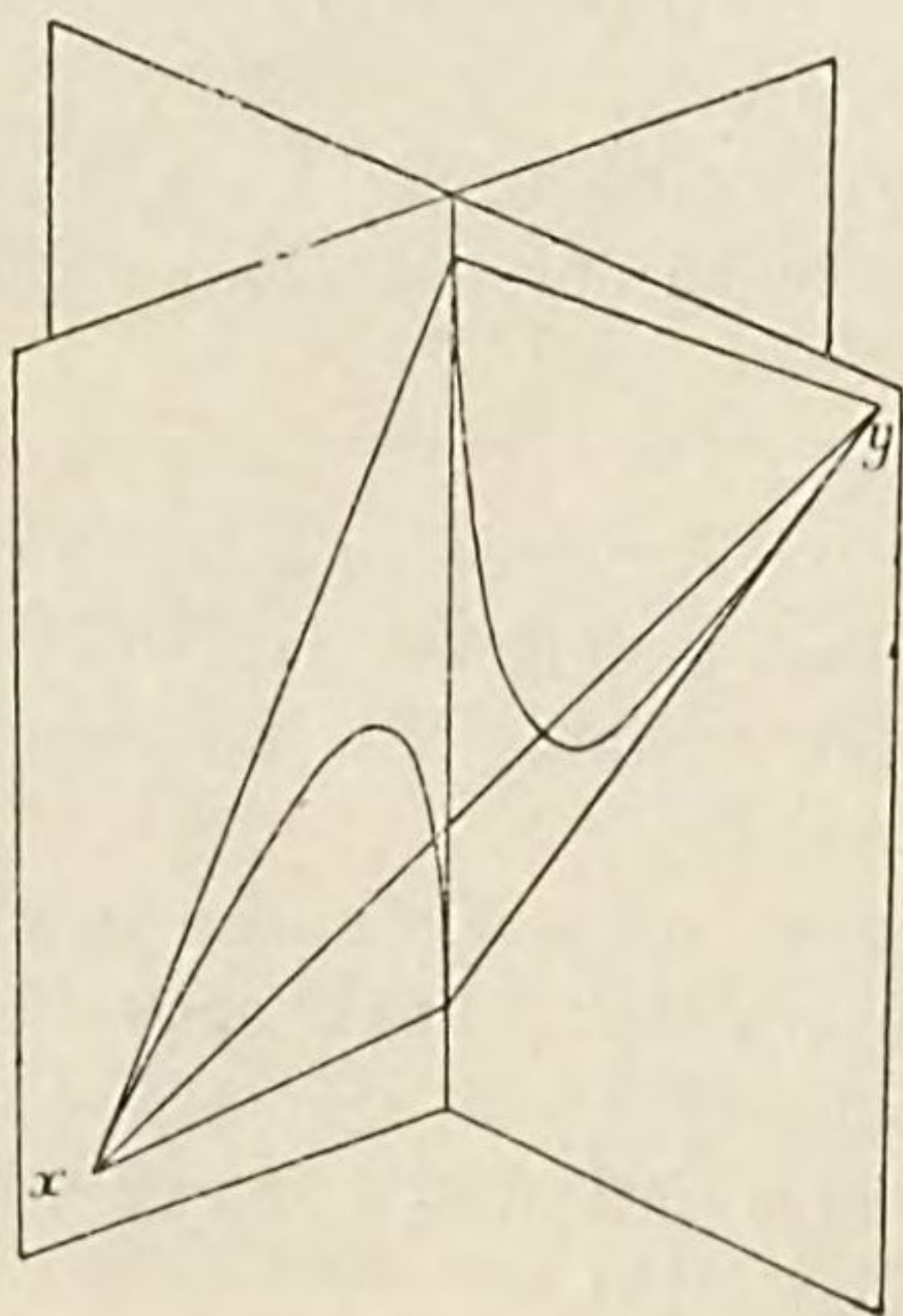
In dem Aufsatz: „Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen (Hauptkatalog pag. 3 ff.) hat Herr *Klein* die Kriterien für die Abzählung der innerhalb gegebener Grenzen vorhandenen reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen geometrisch interpretirt unter Zugrundelegung der quadratischen Gleichung. Für die Gleichung 3. Grades sind die Verhältnisse nur angedeutet. Für die hiebei nötigen Betrachtungen kann das folgende Modell von Vorteil sein. Ist die cubische Gleichung

$$z^3 + 3Az^2 + 3Bz + C = 0$$

so tritt als Discriminantenmannigfaltigkeit auf die zur Raumcurve

$$A = -\lambda, \quad B = \lambda^2, \quad C = -\lambda^3$$

gehörige abwickelbare Fläche 4. Ordg. Um die in dem Intervalle x bis y ($x < y$) befindlichen reellen Wurzeln zu finden, betrachtet man die Schmiegungebenen in den Punkten $\lambda = x$ und $\lambda = y$. Diese Schmiegungebenen werden von der abwickelbaren Fläche je nach Parabeln geschnitten,



welche die in jeder Schmiegungeebene gelegene Tangente berühren. Betrachtet man blos den Teil der abwickelbaren Fläche, der zwischen den beiden Schmiegungebenen gelegen ist, so wird durch ihn und die beiden Schmiegungebenen der Raum in 5 Gebiete geteilt. In den Punkten eines solchen Gebietes gibt es 1, 2 oder 3 Schmiegungebenen an den betrachteten Flächenteil. In dem Teil, der von der abwickelbaren Fläche und den beiden Ebenen begrenzt wird, gibt es 3 reelle Schmiegungebenen. Diese Figur entspricht der „richtigen“ Figur 3 des citirten Aufsatzes.

An dem Modell ist ferner in schwarzen

Fäden das Tetraeder angebracht, welches die vier Ebenen

$$a_x^3 = 0, \quad a_x^2 a_y = 0, \quad a_x a_y^2 = 0, \quad a_y^3 = 0$$

bilden, wenn die gegebene Gleichung mit $a_z^3 = 0$ bezeichnet wird.

Bestimmt man die zwischen x und y gelegenen reellen Wurzeln mittels des *Jacobi'schen* Ansatzes (l. c. p. 14) so heisst dies, dass man statt der abwickelbaren Fläche des Tetraeder zur Begrenzung verwendet. Die Grösse der Ungenauigkeit wird also durch den Raum versinnlicht, der zwischen der Fläche und dem Tetraeder gelegen ist. Diese Figur entspricht der Figur 7 (l. c.) in der Ebene.

(Doehleemann.)

48a. Graphische Darstellung einer Function die nicht nach der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden kann, obschon die letztere convergirt, nach Angabe von Professor **Alfred Pringsheim** in München.

Setzt man

$$(1) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{\nu} x^2}$$

wo λ eine beliebige reelle Grösse, a^2 positiv und > 1 , so erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ nicht nach positiven Potenzen von x entwickelt werden kann, da in jeder noch so kleinen complexen Umgebung der Nullstelle unendlich viele singuläre Stellen $x = i a^{-\nu}$ liegen.

Nichts desto weniger besitzt $f(x)$ für $x = 0$, sofern man unter x jetzt durchweg eine reelle Veränderliche versteht, bestimmte endliche Differential-Quotienten jeder endlichen Ordnung.

Setzt man nämlich $f(x)$ in die Form:

$$f(x) = \frac{1}{2i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \left\{ \frac{1}{a^{\nu} x - i} - \frac{1}{a^{\nu} x + i} \right\}$$

so folgt durch gliedweise Differentiation (welche wirklich die Differential-Quotienten von $f(x)$ liefert, da die ursprüngliche und jede durch Differentiation daraus abgeleitete Reihe für alle reellen x gleichmässig convergent dass:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu} \cdot a^{n\nu}}{\nu!} \cdot \frac{(a^{\nu} x + i)^{n+1} - (a^{\nu} x - i)^{n+1}}{(a^{2\nu} x^2 + 1)^{n+1}}$$

Mithin ergibt sich:

$$(2) \quad f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m \cdot (2m)! e^{\lambda a^{2m}}$$

Setzt man jetzt:

$$(3) \quad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{\lambda a^{2\nu}} x^{2\nu}$$

so erkennt man aus der Beziehung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\lambda a^{2n}} \right)^{\frac{1}{2n}} = \begin{cases} \infty & \text{falls } \lambda > 0 \\ 0 & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$$

*) Herr *Diem* hatte die Freundlichkeit, diese Construction nach meinen Angaben auszuführen.

dass die mit $\varphi(x)$ bezeichnete Reihe d. h. die mit den Erzeugenden $f(x)$ gebildete *Mac Laurin'sche Entwicklung* für jedes noch so kleine x divergiert, falls λ positiv, dagegen für jedes noch so grosse x convergiert, falls λ negativ. Im ersteren Falle wird also $f(x)$ ein Beispiel einer Function darstellen, welcher trotz der Endlichkeit aller Differential-Quotienten jeder endlichen Ordnung, eine für jedes x divergente *Mac-Laurin'sche Entwicklung* zukommt; im zweiten Falle erzeugt dagegen $f(x)$ eine convergente *Mac-Laurin'sche Reihe*, deren Summe $\varphi(x)$ jedoch nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, da, nach dem zu Anfang gesagten, für $f(x)$ die Entwickelbarkeit nach Potenzen von x von vornherein ausgeschlossen erscheint.

Um über die Grösse der Abweichung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ einen deutlichen Ueberblick zu gewinnen, habe ich die Curven mit den Gleichungen:

$$y = 2f(x) \qquad \eta = 2\varphi(x)$$

für das Intervall $0 \leq x \leq 1$ und für verschiedene Werte des Parameters a construiren lassen. Für den anderen verfügbaren Parameter λ wurde als besonders bequem für die Rechnung ein für allemal der Wert

$$\lambda = \lg \frac{1}{2} = -\lg 2$$

gewählt, so dass also

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-\lg 2)^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{\frac{2\nu}{2}} x^2}$$

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a \cdot x^{2\nu}$$

In der beigegebenen Figuren-Tafel sind die f -Curven durch schwarze, die φ -Curven durch rote Linien dargestellt.

Es liegt auf der Hand, dass die Abweichung zwischen einer f -Curve und der entsprechenden d. h. zu dem nämlichen Werte von a gehörigen φ -Curve um so stärker hervortreten wird, je grösser a ist. Legt man a die beiden extremen Werte $a = 1$ und $a = \infty$ bei, so ergibt sich für $a = 1$:

$$2f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad 2\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{letztere Gleichung unter der Voraussetzung } x^2 < 1)$$

d. h. für $a = 1$ fallen in dem betrachteten Intervalle die f - und die φ -Curve in eine gewisse Curve 3. Ordnung zusammen.

Dagegen wird für $a = \infty$

$$2f(x) = \frac{2}{1+x^2} \qquad 2\varphi(x) = 1$$

d. h. die f -Curve ist in diesem Falle diejenige Curve 3. Ordnung, deren Ordinate durch Verdoppelung der zu $a = 1$ gehörigen entstehen; während die φ -Curve in eine Parallele zur x -Axe im Abstände 1 übergeht.

Zwischen diesen Extremen verlaufen nun die f - und die φ -Curven für $1 < a < \infty$, wie dies in der Figur für $a = \sqrt{2}$, 2 , $2\sqrt{2}$, $a = \sqrt{1000}$ dargestellt ist. Für $a = \sqrt{2}$ ist die Abweichung zwischen der f - und der φ -Curve für $0 \leq x \leq 0,5$ bei dem gewählten Masstabe noch gar nicht, für $0,5 < x \leq 1$ immerhin sehr schwach merklich. Sie wird dagegen schon sehr deutlich für $a = 2$ und noch mehr für $a = 2\sqrt{2}$; im letzteren Falle verläuft die φ -Curve schon sehr nahe an der für $a = \infty$ resultirenden Ge-

raden, von der sie für noch einigermaßen grössere Werte von a — z. B. $a = 10$ — überhaupt nicht mehr unterschieden werden kann (NB. immer unter der Voraussetzung $x \leq 1$). Für $x = 0$ und jedes noch so grosse endliche a haben sämtliche f - und φ -Curven die Ordinate $y = \eta = 1$, und zwar findet dort zwischen je einer f -Curve und der zugehörigen φ -Curve eine Berührung von unendlich hoher Ordnung statt [da ja für jedes noch so grosse n : $f^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0)$]. Nur für $a = \infty$ nimmt die Ordinate y der f -Curve plötzlich den Wert 2 an (während auch hier $\eta = 1$ bleibt): die f -Curven besitzen nämlich rechts von der Nullstelle ein Maximum, welches mit wachsendem a der Nullstelle immer näher rückt und für $a = \infty$ mit $x = 0$ zusammenfällt. (Pringsheim.)

50a. Zeichnungen zur Darstellung der „Additionslogarithmen für complexe Grössen“, nach von Prof. Mehmke berechneten numerischen Tafeln ausgeführt von seinem Assistenten K. Exel. Mathem. Institut der techn. Hochschule Darmstadt.

Bei den von Leonelli erdachten, von Gauss zuerst berechneten sog. Additionslogarithmen in der heute üblichen, von Wittstein herrührenden Form stehen Argument A und Function B in der Beziehung, dass für

$$A = \log r, \quad B = \log(1 + r),$$

oder anders ausgedrückt

$$10^B = 1 + 10^A$$

ist. Man kann Leonelli's Gedanken erweitern, indem man an Stelle der reellen Grösse r die complexe Grösse $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt, oder die beiden reellen Functionen $B, \mathbf{B}$ der beiden reellen Veränderlichen durch die Gleichungen definirt:

$$10^B(\cos \mathbf{B} + i \sin \mathbf{B}) = 1 + 10^A(\cos \mathbf{A} + i \sin \mathbf{A}).$$

Für $\mathbf{A} = 0$ ergeben sich die gewöhnlichen Additionslogarithmen wieder; im Falle $\mathbf{A} = \pi$ stehen die Grössen B in enger Beziehung zu den von J. Zech berechneten „Subtractionslogarithmen“. Diese „Additionslogarithmen für complexe Grössen“ gewähren beim Rechnen mit complexen Grössen dieselben Erleichterungen, wie die gewöhnlichen Additionslogarithmen beim Rechnen mit reellen Grössen. Sie gestatten ferner, die Methode von Gauss zur numerischen Auflösung reeller trinomischer Gleichungen auf beliebige Gleichungen mit complexen Coefficienten auszudehnen. Betrachtet man A und $\mathbf{A}$ als Abscisse und Ordinate, und das einmal B , das anderemal $\mathbf{B}$ als Höhe eines Raumpunktes, so erhält man zwei Flächen, welche in den ausgestellten Zeichnungen durch die Projectionen einer Anzahl von zu den Coordinatenebenen parallelen Schnitten auf die Coordinatenebenen zur Anschauung gebracht sind. Diese Flächen spielen auch bei der unter Nr. 40 f. S. 16 erwähnten Methode, numerische Gleichungen mit complexen Coefficienten graphisch aufzulösen, eine wichtige Rolle. Mit Rücksicht auf diese Anwendungen sind die Axenmasstäbe verschieden gewählt worden, und zwar ist bei A und B $1 = 80$ mm, bei $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ 1 Centigrad $= 0,8$ mm gesetzt.

(Mehmke.)

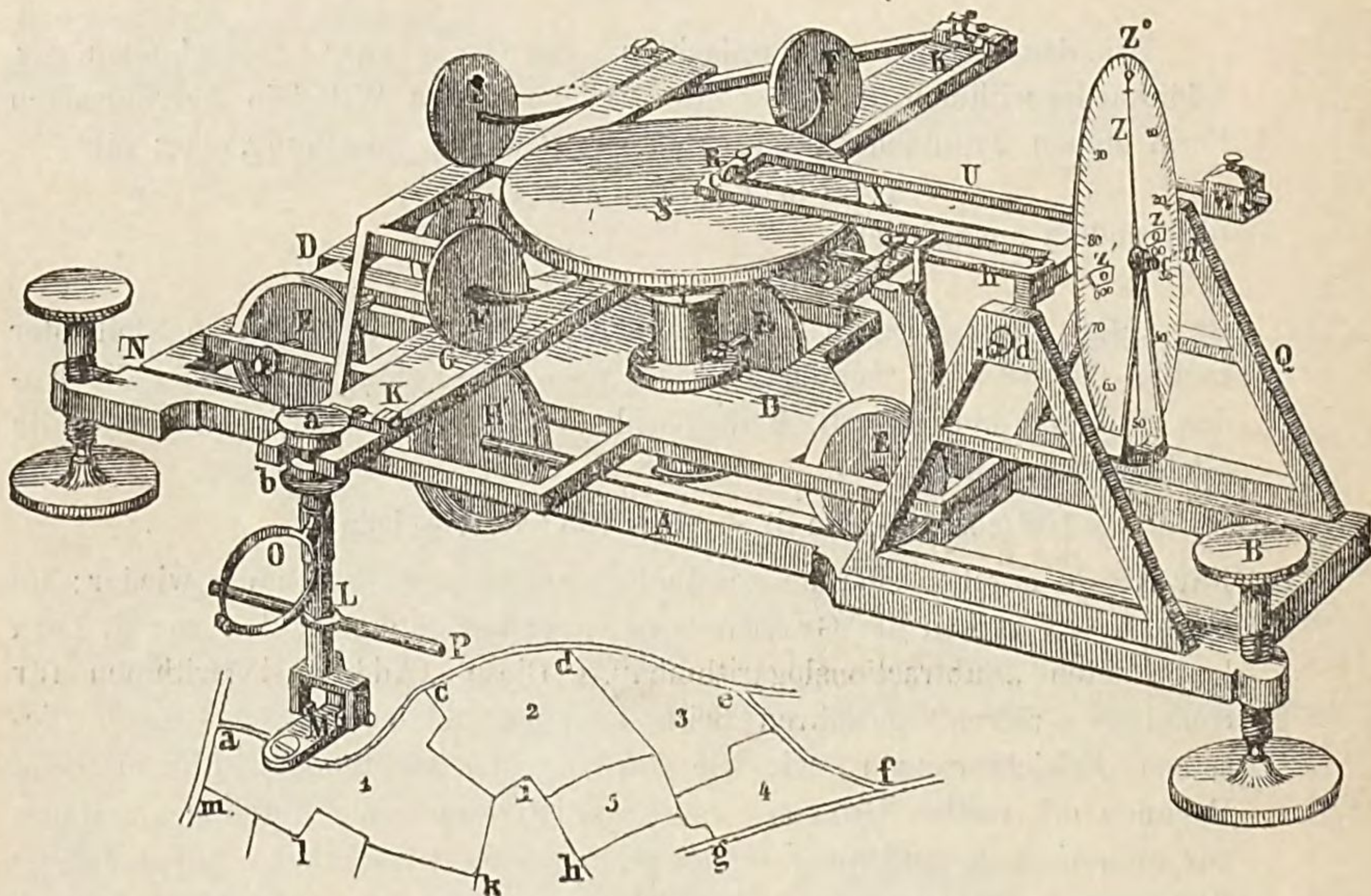
*Dritter Abschnitt. Integralrechnung.***F. Planimeter.**

- 57a. Masstäbe und Flächenmasstafeln** von Techniker **Bruno Urban** in Ettlingen (bei Karlsruhe in Baden.)

Transversalmasstäbe aus Hartglas (Preis à 2 Mark). Geteilte Glastafeln zur Flächenberechnung (Preis à 10 Mark). Geteilte Celluloidtafel (Preis 10 Mark). Beigegeben sind Füllziehfedern (Preis à 3.50 Mark) und ein „Parallelzirkel“ (D. R. P.) (Preis 15 Mark).

- 58. Planimeter von Wetli-Hansen.** Aus dem **Geodätischen Institut der techn. Hochschule München.**

Wir geben nachstehend noch zur Ergänzung der auf pag. 184 des Hauptkataloges enthaltenen Charakteristik des Instruments die dem Handbuch für Vermessungskunde von *C. M. v. Bauernfeind* entnommene Abbildung desselben.

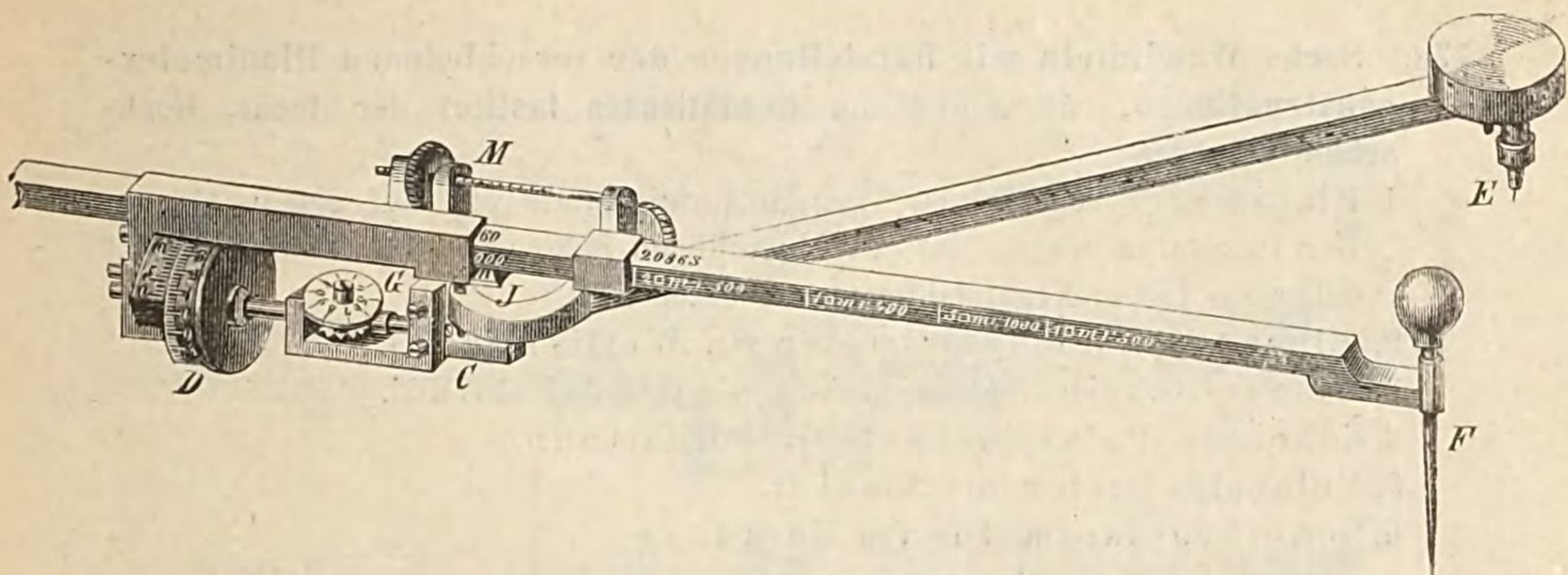


- 58a. Scheibenplanimeter** von **Ott und Coradi** (Kempten). Aus dem **Geodätischen Institut der techn. Hochschule München.**

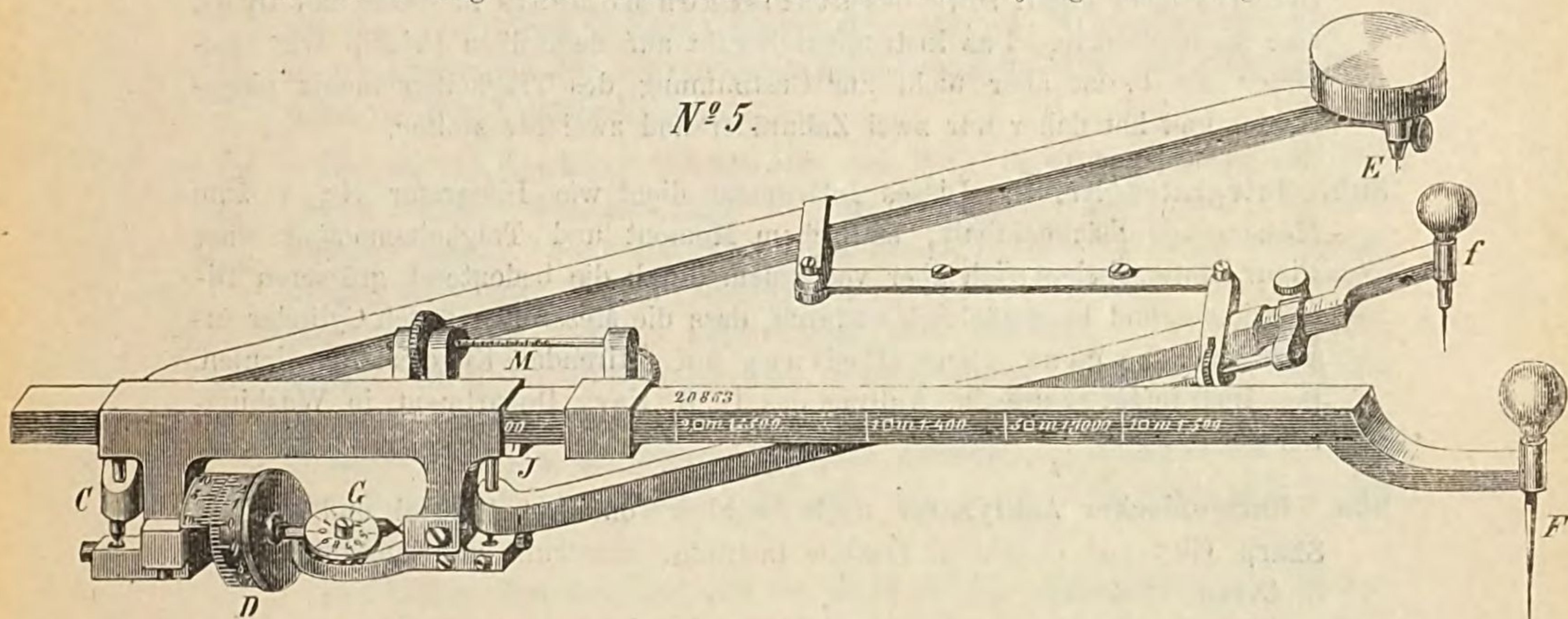
Seiner Grundlage nach stimmt das Instrument im Wesentlichen mit dem vorstehenden überein und ist wie dieses als Linear-Scheiben-Planimeter zu bezeichnen.

- 62 a, b; 63 a. Polarplanimeter**, ausgestellt von **Amsler-Laffon & Sohn**, Schaffhausen.

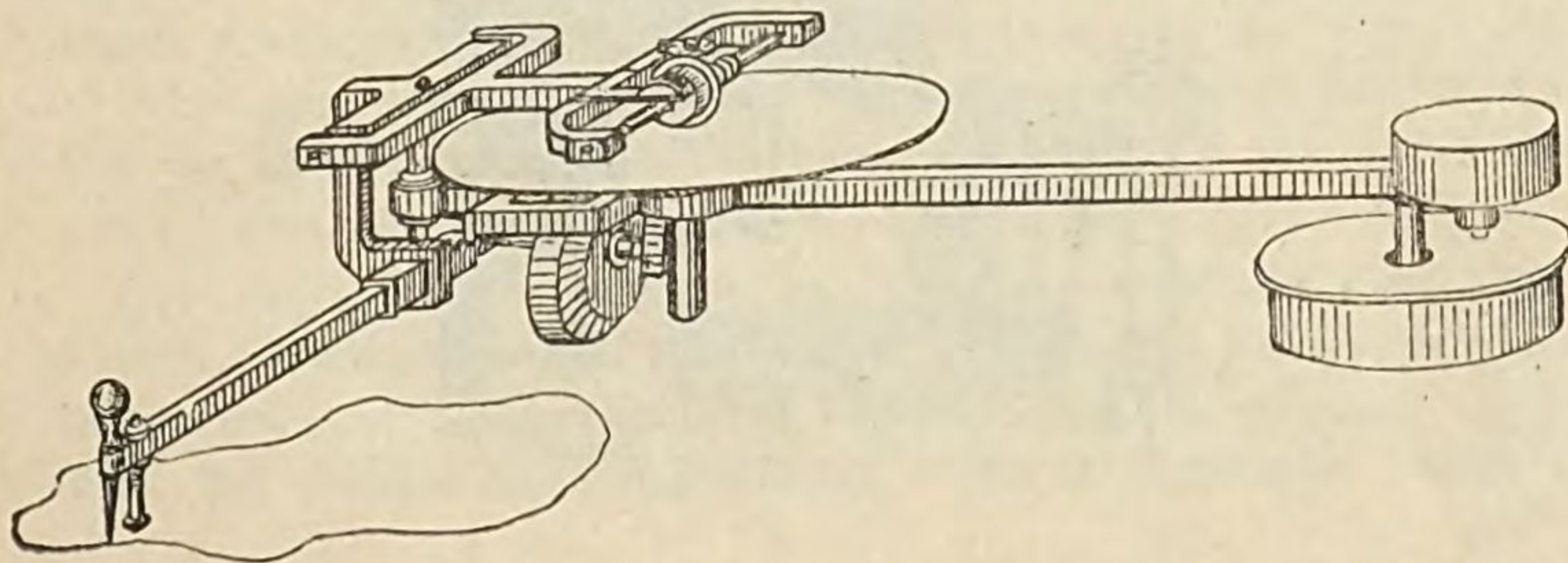
- 62a. Planimeter Nr. 4.** (Amsler's Katalog; ausgeführt seit 1855) gibt den Flächeninhalt in mehreren Masseneinheiten oder Massverhältnissen.



62b). **Planimeter Nr. 5.** (Amsler's Katalog; ausgeführt seit 1859) dient zur Messung sehr grosser oder sehr kleiner Figuren. Zur Messung grosser Figuren bedient man sich des Fahrstifts F zum Umfahren und lässt den Fahrstift f unberücksichtigt. Um sehr kleine Figuren zu messen, stellt man den Arm a passend ein, und verfolgt den Umfang der zu messenden Figur mit dem Fahrstift f ohne ihn selber mit der Hand zu fassen, indem man den grossen Fahrstift F führt. Dieses ist mit grosser Leichtigkeit und Sicherheit zu bewerkstelligen, da f und F nahezu geometrisch ähnliche Figuren beschreiben. In diesem Falle kommt die Einstellung der Stange, welche den Fahrstift F trägt nicht in Betracht, sondern nur diejenige der Stange a.



63a. Planimeter Nr. 8. (Amsler's Katalog; seit 1882 ausgeführt) beruht auf demselben Princip wie Planimeter Nr. 9, nur ist die Geradföhrung jenes Instruments hier durch Kreisföhrung um einen „Pol“ ersetzt.



77a. Sechs Wandtafeln mit Darstellungen der verschiedenen Planimeter-constructionen. Ausgeführt im **Geodätischen Institut der techn. Hochschule München.**

1. Planimeter von Ernst. Das Integrationsrad rollt auf einem Conus. Der Integrationswagen auf zwei parallelen Schienen. Das Planimeter ist daher als Linear-Kegelplanimeter zu bezeichnen.
2. Linear-Scheibenplanimeter von Wetli-Hansen.
3. Linear-Scheibenplanimeter von Ott und Coradi.
4. Scheiben-Polarplanimeter von Hohmann.
5. Polarplanimeter von Amsler.
6. Scheibenplanimeter von Coradi.

G. Weitere Instrumente zur mechanischen Integration.

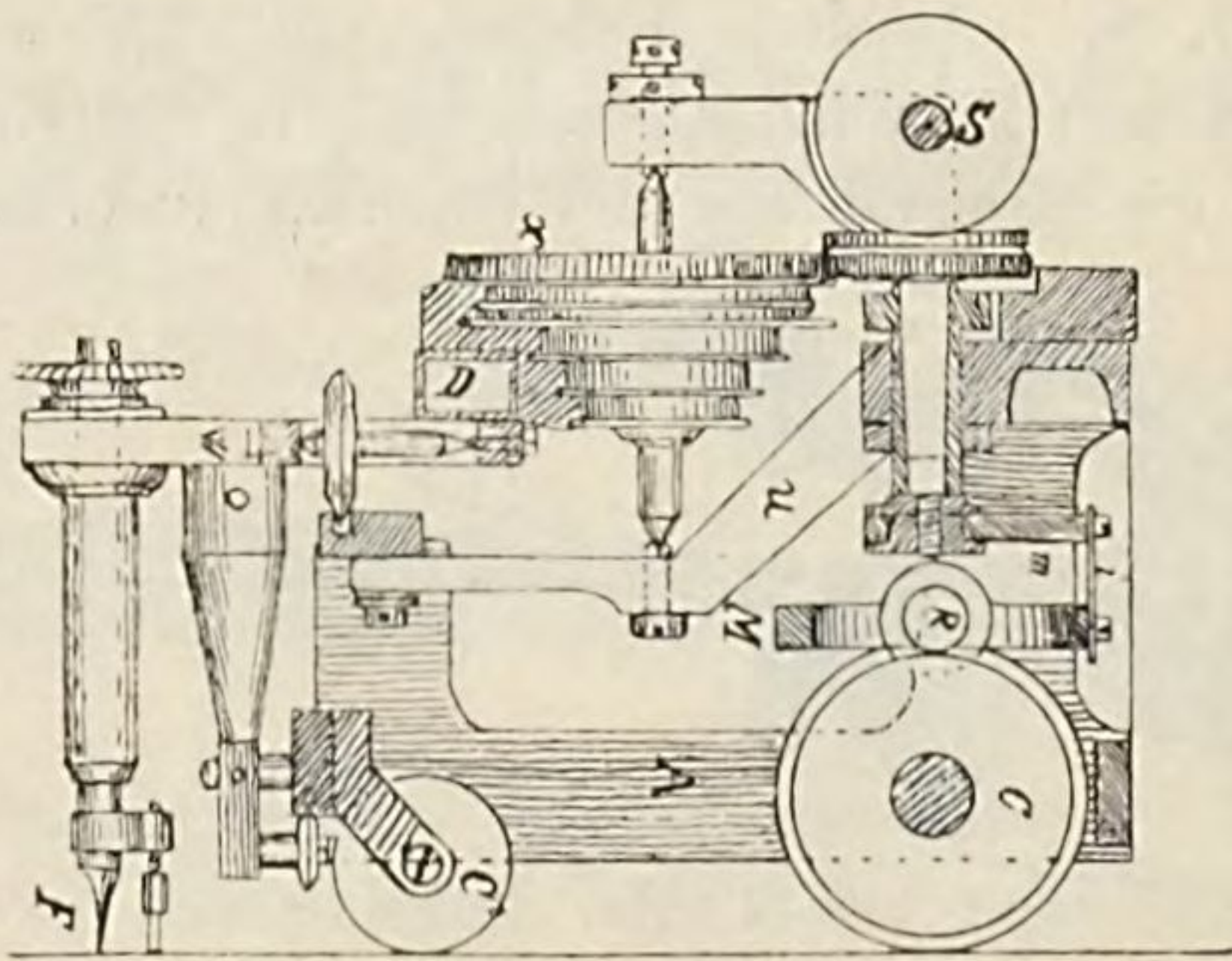
78. Zwei Integraphen, System Abdank-Abakanowicz. Construction Coradi.
Beide Integraphen ausgestellt von **Coradi**, Zürich.

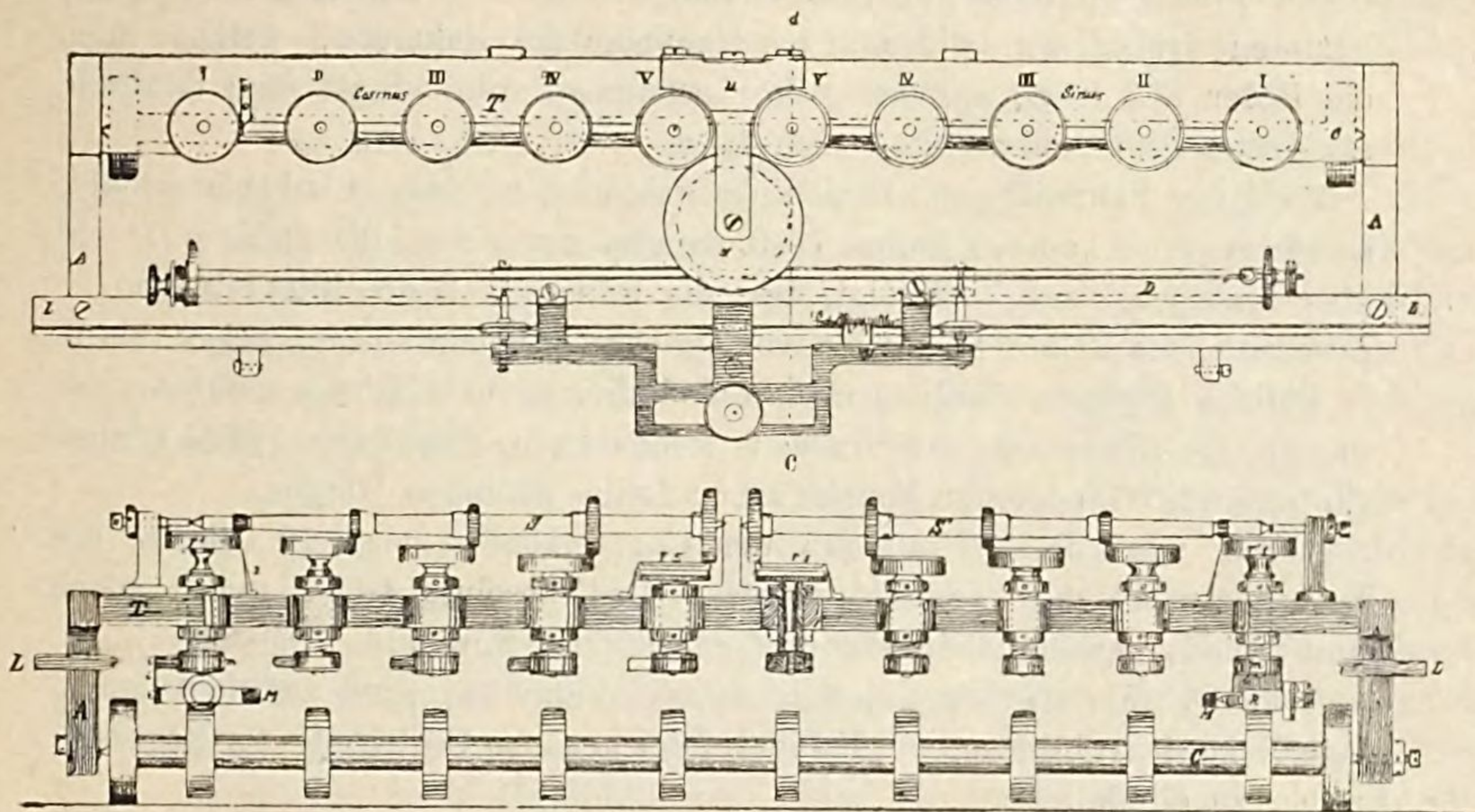
80a, b. Integratoren von Amsler-Laffon & Sohn, Schaffhausen.

80a. Integrator Nr. 3. (Amsler's Katalog) dient zur Ermittlung des Flächeninhalts einer Figur, sowie des statischen Moments in Bezug auf irgend eine Momentenaxe. Das Instrument beruht auf demselben Princip wie Integrator Nr. 1, ist aber nicht zur Bestimmung des Trägheitsmoments eingerichtet und hat daher nur zwei Zahnräder und zwei Messrollen.

80b. Integrator Nr. 5. Dieses Instrument dient wie Integrator Nr. 1 zum Messen von Flächeninhalt, statischem Moment und Trägheitsmoment einer Figur, unterscheidet sich aber von jenem durch die bedeutend grösseren Dimensionen und hauptsächlich dadurch, dass die Messrollen durch Cylinder ersetzt sind, die ganz ohne Gleitung auf rotirenden Kugelcalotten laufen. Das Instrument wurde im Auftrag des U. S. Navy Department in Washington gebaut.

90a. Harmonischer Analysator nach Angaben von Prof. **Henrici** und Prof. **A. Sharp**, City and Guilds of London Institute, construiert und ausgeführt von **G. Coradi** in Zürich.





Dies Instrument beruht auf den Principien, welche p. 131 des Hauptkataloges unter der Ueberschrift „Anderes Instrument“ auseinander gesetzt sind. Die Ausführung schliesst sich jedoch den von Mr. A. Sharp ersonnenen Modificationen an, welche auf Seite 134 beschrieben sind. Das ausgestellte Instrument ist von Herrn G. Coradi in Zürich hergestellt, welcher bedeutende Aenderungen in der Anordnung der verschiedenen Teile eingeführt und das ganze Instrument im Detail entworfen hat.

Bei der Beschreibung können wir uns kurz fassen mit Bezug auf die obigen Citate. Was auf Seite 131 als Wagen bezeichnet ist, soll hier Rahmen heissen. Statt der dort beschriebenen Zahnstange hat Coradi einen Wagen eingeführt, der auf einer Schiene vorne am Instrument sich in Richtung der x -Axe bewegt. Dieser trägt den Fahrstift F und oben eine Stange mit einem Silberdrahte SS . Dieser schlingt sich um eine Scheibe, die in der Mitte des Instruments sich um eine verticale Axe drehen kann. Dieselbe Axe trägt am oberen Ende ein Zahnrad Z , welches die Achsen der Registrirrollen so dreht, dass jede mit der y -Axe einen Winkel α macht.

Der hintere Teil des Rahmens ist etwas erhöht und trägt an jeder Seite von Z fünf verticale Axen, die mit $1, 1^1; 2, 2^1$ etc. numerirt sind. Jede derselben hat aber ein Kronrad. In diese greifen Zahnräder ein, die auf zwei horizontalen Axen AB und BC befestigt sind. 5 und 5^1 haben ferner je ein Zahnrad. Diese werden beide durch das Zahnrad Z getrieben. Durch Verschieben des Fahrstiftes F in Richtung der x — werden also alle 10 Axen gedreht und zwar, wenn der Fahrstift die ganze Basis der Curve DE ($= 40$ cm) durchlaufen hat, haben die Axen $1, 1^1$ eine volle Umdrehung gemacht, die Axen $2, 2^1$ zwei u. s. w.

Am unteren Ende einer jeden der 10 Axen ist mittelst eines verticalen Stahlblechs ein horizontaler Ring befestigt, welcher die horizontale Axe einer Registrirrolle mit dem gewöhnlichen Zählwerk zum Ablesen trägt. Auf ihrer Mitte hat dieselbe einen ringförmigen Wulst als eigentliche Registrirrolle,

Dieser ruht und rollt auf dem Umfange einer Celluloid-Scheibe. Diese letzteren drehen sich alle mit der Hauptaxe des Rahmens, welcher auch die Räder R R trägt, auf denen das Instrument ruht. S ist eine Laufrolle als dritter Stützpunkt.

Wird der Fahrstift ganz nach links gebracht, so dass er bei D anschlägt, so stehen die Axen der Rollen 1—5 parallel der y-Axe, die anderen 1'—5' aber senkrecht dazu. Es folgt, dass die Rollen 1—5 die Integrale von $dy \sin n x$, die Rollen 1'—5' die von $dy \cos n x$ geben, für $n = 1, 2$, bis 5.

Auf der mittleren verticalen Axe sind drei weitere Scheiben angebracht, um die der Silberdraht geschlungen werden kann. Mit deren Hülfe können fünf weitere Glieder der Fourier'schen Reihe gefunden werden.

Durch viermaliges Umfahren der Curve können also 10 Glieder der Reihenentwicklung ermittelt werden. Das absolute Glied muss jedoch durch einen gewöhnlichen Planimeter bestimmt werden.

Beim Gebrauch ist es zweckmässig, den Fahrstift von E auf die Anfangslage D zurückzubringen, um Fehler in der genauen Centrirung der Registrirrollen zu eliminiren.

In Bezug auf die Genauigkeit des Instruments sei bemerkt, dass die erhaltenen Fehler in den Amplituden der verschiedenen Glieder durch die Dicke der zu analysirenden Curven gedeckt werden.

Es mag von Interesse sein zu bemerken, dass Mr. A. Sharp auf meine Anregung einen neuen Analysator erfunden, welcher statt der Coefficienten A_n , B_n in der Fourier'schen Reihe sofort die Amplituden a_n und Phase α_n (vergl. Seite 136) direct bestimmt, sowie einen Harmonographen, der die aus den ermittelten Gliedern resultirende Curve zeichnet. (Vergl. die beiden folgenden Nummern).

(O. Henrici.)

90 b. Zeichnungen zu zwei harmonischen Analysatoren von A. Sharp, London.

Die Darstellungen beziehen sich auf zwei Instrumente zur harmonischen Analyse, die ihrem Princip nach in dem Aufsatze von *Henrici* (Hauptkatalog) characterisirt sind.

90 c. Graphische Darstellung eines Harmonographen von A. Sharp, London.

Der Apparat dient zum Zeichnen einfacher und zusammengesetzter harmonischer Curven.

92 a. Integration bei Ampère-Zählern von Assistent J. Schütz und Assistent K. Fischer, München.

Die zur Messung des Verbrauchs elektrischer Energie dienenden Instrumente haben folgende Integration zu leisten: $\int i v dt$, wo dt ein Zeitelement, i die augenblickliche Stromintensität und v die Klemmenspannung bedeutet, durch die der elektrische Strom zu und von seiner Arbeitsstätte getrieben wird. Da letztere Grösse in den in praxi hier in Betracht kommenden Fällen in der Regel einen nahezu unveränderlichen Wert hat, so bleibt nur noch die Integration $\int i dt$, welche ein „Elektrizitätszähler“ aus-

zuwerten hat. An den zahlreichen hieher gehörigen Apparaten — (zumeist durch die Pariser Preisconcurrentz veranlasst) — lassen sich im Wesentlichen folgende vier Grundtypen unterscheiden:

Bei dem ersten, in mannigfachen Variationen vertretenen Typus ist die Integration durch eine Summierung endlicher Elemente umgangen: sei es, dass der Zeiger eines aperiodischen Ampèremeters in regelmässigen Zeitintervallen zum Ausschlag gebracht, und diese Bewegung auf ein Zählwerk übertragen wird, oder sei es, dass ein auf ein Zählwerk wirkender Fühlhebel von Zeit zu Zeit den Stand eines Ampèremessers befühlt und registriert. (E. Hartmann, Siemens u. A.)

Der 2. Typus ist dadurch charakterisirt, dass die Bewegung eines Pendels, eines Elektromotors o. dgl. durch Beeinflussung des elektrischen Stromes beschleunigt, bezw. gebremst und mit der Bewegung eines gleichartigen, unbeeinflussten Apparates verglichen wird. Ein hervorragendes Beispiel dafür ist der Aron'sche Elektrizitätszähler. Die Auswertung erfolgt durch ein Differentialzählwerk mit zwei von einander unabhängigen Axen, deren eine hohle die Zifferblätter dreht, die andere die Zeiger in entgegengesetzter Richtung.

Beim 3. Typus werden die durch das Integral $\int i \, dt$ definirten Coulomb's durch ihre elektrolytischen Wirkungen gemessen (E. Grassot, D. R. P. Nr. 60.276).

Der 4. Typus endlich verwendet Integratoren nach dem Thomson'schen Princip (Stiehl, Cauderay u. A.). Der im folgenden skizzierte Apparat will lediglich als ein Beispiel der Anwendung des Thomson'schen Integrationsprincipes auf solche Integrationen, in denen die Zeit als Integralargument auftritt, gelten.

Mit dem Eisenkern eines Kohlrausch'schen Ampèremeters ist ein Frictionsstab in fester Verbindung, der, wenn er sich verschiebt, einen Kegel dreht, dessen Axe einen senkrechten Querarm trägt. Dieser Querarm bildet die Axe einer als Grundrädchen eines leichtgebauten Zählwerkes fungirenden Frictionsscheibe; diese wird durch eine zweite von einem Uhrwerk gleichmässig getriebene Scheibe in Drehung versetzt. Der oben erwähnte Frictionsstab besitzt eine ebene Krümmung, deren Curve so definirt ist: Theilt man den Stab derart ein, dass die Projection dieser Teilung auf die Axe des Ampèremeters ein congruentes Abbild der Scala desselben gibt, so muss die Projection derselben Teilung auf die Axe des Frictionskegels eine Scala liefern, deren Teile mit den entsprechenden Teilen der Ampèremeterscala constante Producte liefern.

(Schütz.)

II. Abteilung.

Geometrie.

H. Zeichenapparate.

95a. Zirkel für den goldenen Schnitt von **Dr. Goeringer**, ausgestellt von **A. Brugger**.

95b. Kreisteiler (D. R. P.) von **E. Goldschmitt** in Bayreuth.

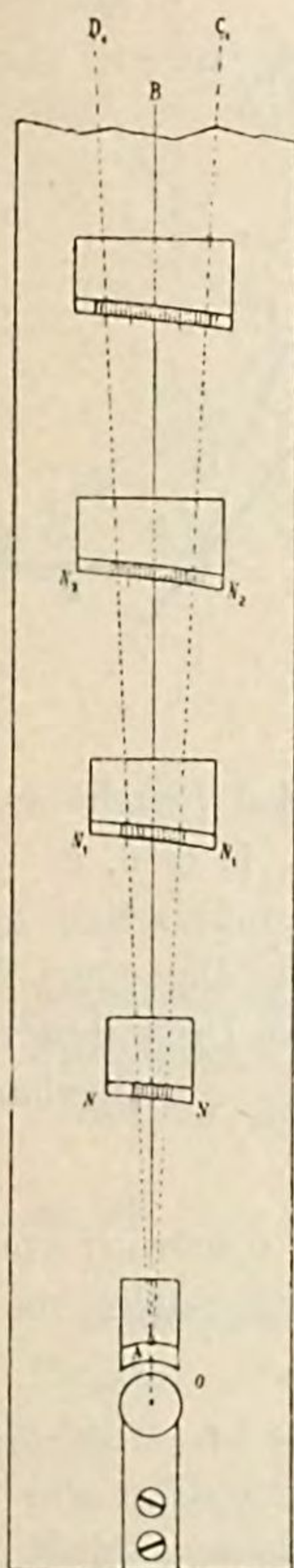
Ein Kreissector aus starkem Carton ist in gleiche Teile (von 0 bis 100) eingeteilt. Er kann durch Aufbiegen und Einhängen eines kleinen Häckchens in die dafür bestimmten Einschnitte in einen Kegel verwandelt werden, dessen Grundkreis dann in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile geteilt ist, welche durch verschiedenes Einhängen des Häckchens variiert werden kann. Die Einstellung des Kegels wird noch durch eine Holzschraube in passender Weise fixirt. Kreiseinteilungen lassen sich so mit einer für die mannigfachsten Zwecke ausreichenden Genauigkeit herstellen.

95c. Polar- und Einteilungs-Masstäbe, construiert von Bezirksgeometer **Röther** in Weiden, ausgeführt und ausgestellt vom math.-mechanischen Institut von **A. Ott** in Kempten (Bayern.)

Diese Masstäbe beruhen auf der Eigenschaft der logarithmischen Spirale, die darin besteht, dass zu gleichen Bögen gleiche Differenzen der Radien nach den Endpunkten gehören. Bei dem Polarmasstab, Figur 1, ist die Curve aus einer Metallplatte hergestellt und der Curvenrand in Millimeter geteilt, wobei die Constante der logarithmischen Spirale so gewählt wurde, dass die Radiendifferenz von einem Teilstrich bis zum nächsten 0,2 mm beträgt. Mit Hilfe dieser Teilung können dadurch, dass man das Instrument mit dem Pol auf eine Gerade legt und um denselben dreht, auf dieser Geraden beliebige Längen bis auf 1/10 mm genau abgetragen

oder abgemessen werden. Der Einteilungsmasstab, Figur 2, dient dazu, bei Kartirungen die Messungslinien in Unterabteilungen zu teilen und die zwischen

Fig. 2.

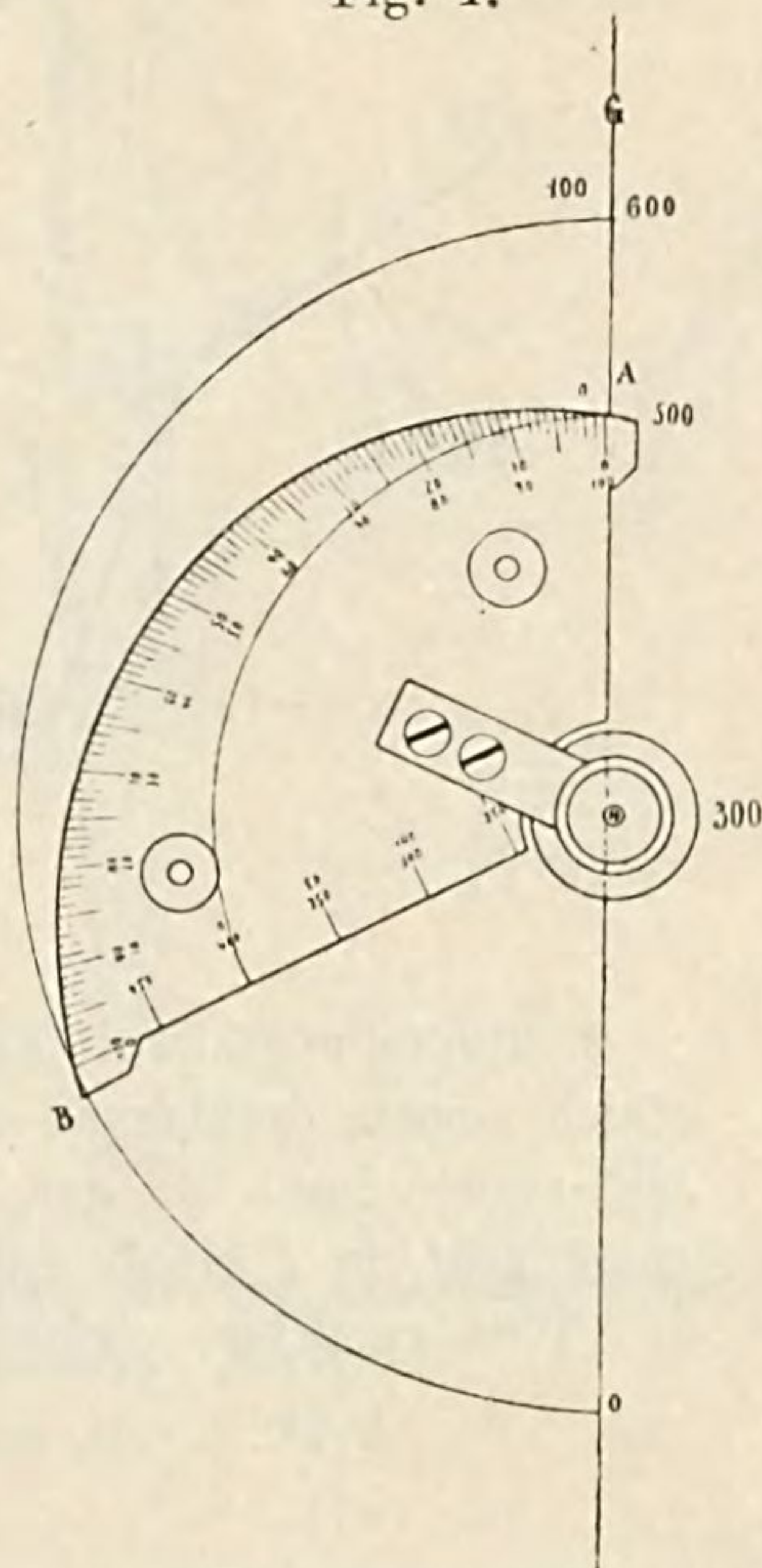


den construirten und gemessenen Längen sich ergebenden Unterschiede auszugleichen. Er besteht aus einem Lineal aus Metall, das um einen Pol drehbar und in Abständen von 50 zu 50 Millimeter von Oeffnungen durchbrochen ist, deren innere Grenzen nach logarithmischen Spiralen gekrümmt und mit Teilungen versehen sind, die wiederum ein Ablesen von $1/10$ mm gestatten. Auf der Mittellinie des Lineals sind die Zwischenräume zwischen den

Oeffnungen genau gleich 50 mm, auf jeder andern durch den Pol gehenden Geraden sind sie zwar unter sich gleich, aber um einen bestimmten kleinen Betrag grösser oder kleiner als 50 mm.

(Prospect A. Ott, Mehmke.)

Fig. 1.

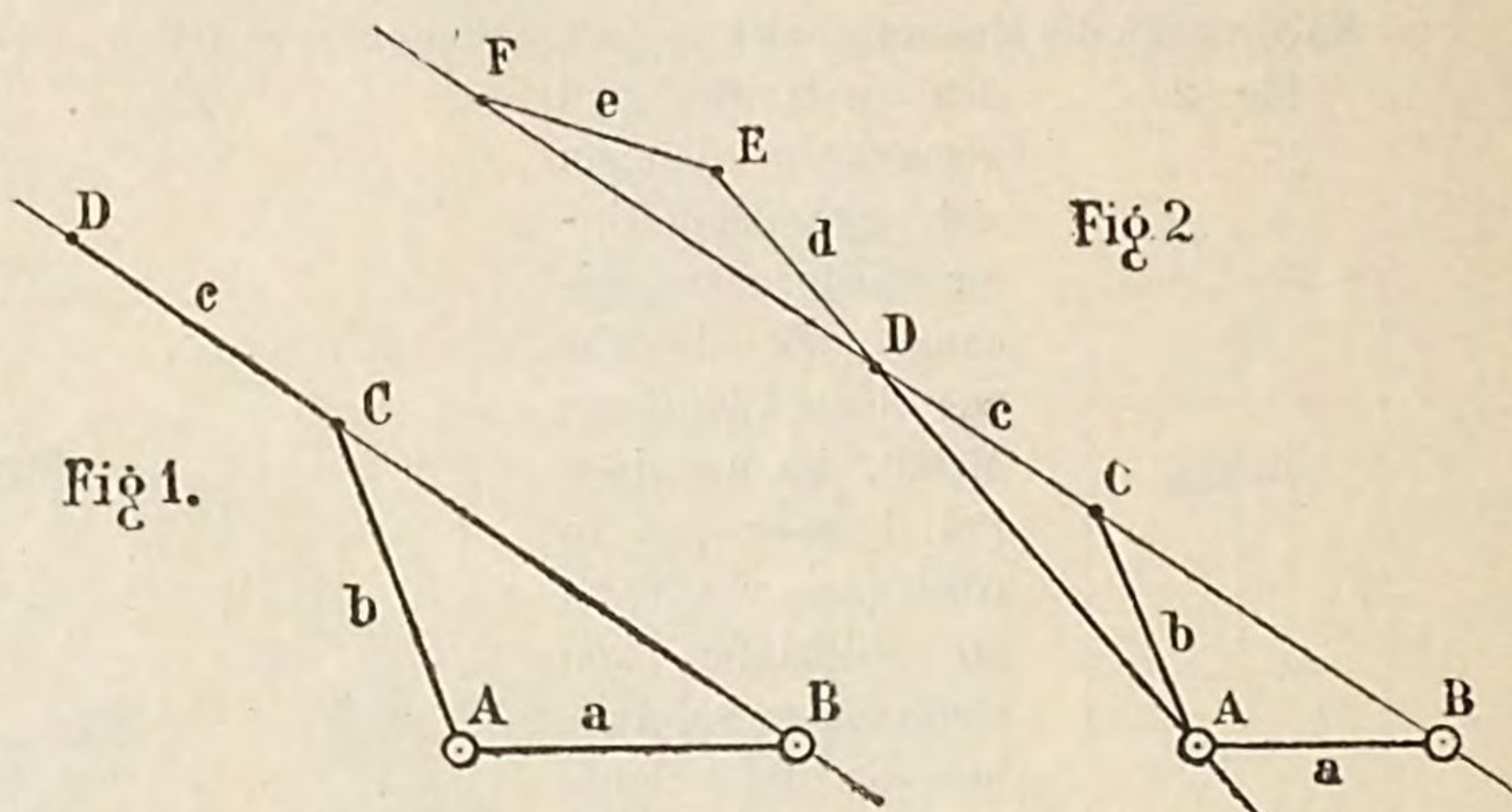


96a Drei Zirkel zur Winkelteilung, von E. Eckhardt in Friedrichsdorf i/T.

1. Dreiteilungszirkel D. R. P. (Fig. 1). Der Dreiteilungszirkel besteht aus 3 gleich langen, drehbar an einander befestigten Armen a, b, c. Von diesen ist der Arm c gezwungen, stets durch B zu gehen.

Gebrauch: Um $\angle ABC$ in 3 gleiche Teile zu teilen ziehe man eine Parallele durch A, dann setze man den Zirkel mit den Spitzen in A und B ein und beschreibe mit D eine Curve (Pascal'sche Schnecke), welche die Parallele in E schneidet. BE ist dann Drittelungslinie des $\angle ABD$.

Vermittelst des Zirkels kann man sofort auch den Winkel von 36° construiren, indem man über AB zwei symmetrische Curven zieht, welche sich in F schneiden. $\angle AFB$ ist dann 36° . Ferner kann der Zirkel in seiner verallgemeinerten Gestalt (bei welcher Arm c in seiner Länge variiert werden kann,) zur graphischen Auflösung von reducirten Gleichungen 3. resp. 4. Grades verwendet werden. Es sind dabei die Armlängen gewisse Functionen der Coëfficienten der vorgelegten Gleichung.

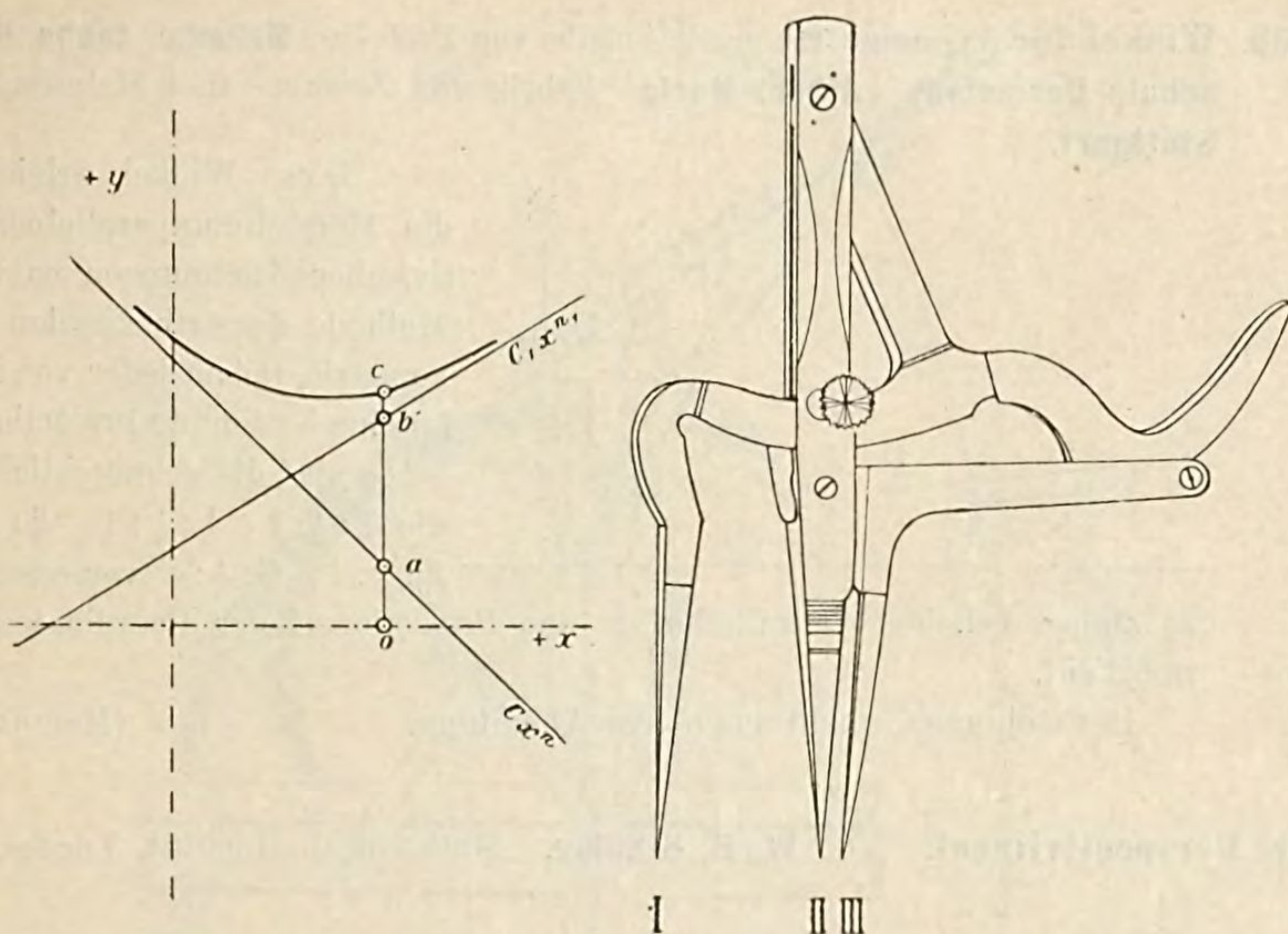


2. Fünfteilungszirkel (Fig. 2). Der Fünfteilungszirkel besteht aus fünf gleich langen, drehbar an einander befestigten Armen a, b, c, d, e. Arm c geht immer durch B, Arm d immer durch A. In A und B sind Spitzen angebracht, in F ein Bleistift, der die Curve beschreibt. Um einen Winkel in 5 Teile zu teilen, verfähre man analog wie oben beim Dreiteilungszirkel. (Eckhardt.)

97a Logarithmischer Zirkel, auf Anregung des Ausstellers construiert von Professor **E. A. Brauer**, techn. Hochschule Karlsruhe, ausgestellt von Prof. **Mehmke** techn. Hochschule Darmstadt.

Dieser mit 3 Spitzen I, II und III versehene Zirkel ist so eingerichtet, dass, wenn zwischen die Spitzen I und II eine Strecke gefasst wird, deren Länge — mit einem Massstabe von 50 mm Längeneinheit gemessen — gleich $\log t$ ist, der Numerus t auf dem Teilbogen abgelesen werden kann, während die Spitzen II und III sich von selbst auf die Entfernung $\log (1 + \frac{1}{t})$ einstellen. Man kann mit Hilfe dieses Zirkels hauptsächlich die Aufgabe lösen: Wenn die Logarithmen zweier (ihrem Zahlenwerte nach nicht bekannten) Grössen als Strecken gegeben sind, die zum Logarithmus der Summe jener Grössen gehörige Strecke zu finden. Sind jene Logarithmen (im obigen Massstabe und unter Beachtung ihrer Vorzeichen) auf einer geraden Linie von einem und demselben Punkt o aus abgetragen (s. die Figur) und bezeichnet a den Endpunkt der zur kleineren Zahl gehörigen Strecke $oa = \log \alpha$, b den Endpunkt der anderen Strecke $ob = \log \beta$, so setze man die Spitze I des Zirkels auf a , die Spitze II auf b und steche unter leichtem Vorwärtsneigen des Zirkels mit der dritten Spitze in's Papier, so hat man den Endpunkt c der Strecke $oc = \log (\alpha + \beta)$. (Auf dem umgekehrten Wege kann $\log (\gamma - \alpha)$ oder $\log (\gamma - \beta)$ gefunden werden, wenn $\log \gamma$ und $\log \alpha$ oder $\log \beta$ gegeben sind).

Der logarithmische Zirkel erlaubt die mechanische Ausführung aller gewöhnlichen Rechnungen, besonders vortheilhaft erweist er sich aber bei der



numerischen Auswertung ganzer Functionen und der Auflösung numerischer Gleichungen nach der logarithmisch-graphischen Methode*).

Besteht die Function $y = f(x)$ nur aus einem Gliede

$$y = C x^n,$$

so ist

$$\log y = \log C + n \cdot \log x$$

Betrachtet man daher $\log x$, $\log y$ als Cartesische Coordinaten eines Punktes, so erhält man als „logarithmisches Bild“ jener Function die gerade Linie, die auf der y-Axe das Stück $\log C$ abschneidet (— welches ohne Logarithmentafel mit Hilfe unseres Zirkels gefunden wird —) und deren Neigungswinkel gegen die x-Axe zur trigonometrischen Tangente den Wert n hat. Ist $f(x)$ zweigliedrig, etwa

$$y = C x^n + C_1 x^{n_1},$$

so zeichnet man die geraden Linien, welche nach dem eben Bemerkten zu den einzelnen Gliedern gehören. Schneidet dann eine beliebige Parallele zur y-Axe diese Geraden in den Punkten a und b und bestimmt man aus diesen Punkten in der oben gezeigten Weise mit Hilfe des logarithmischen Zirkels den Punkt c , so ist dies ein Punkt des „logarithmischen Bildes“ jener Function. Aehnlich verfährt man, wenn $y = f(x)$ mehr als zwei Glieder hat und wenn unter den Gliedern negative vorkommen. (S. die angeführte Abhandlung).

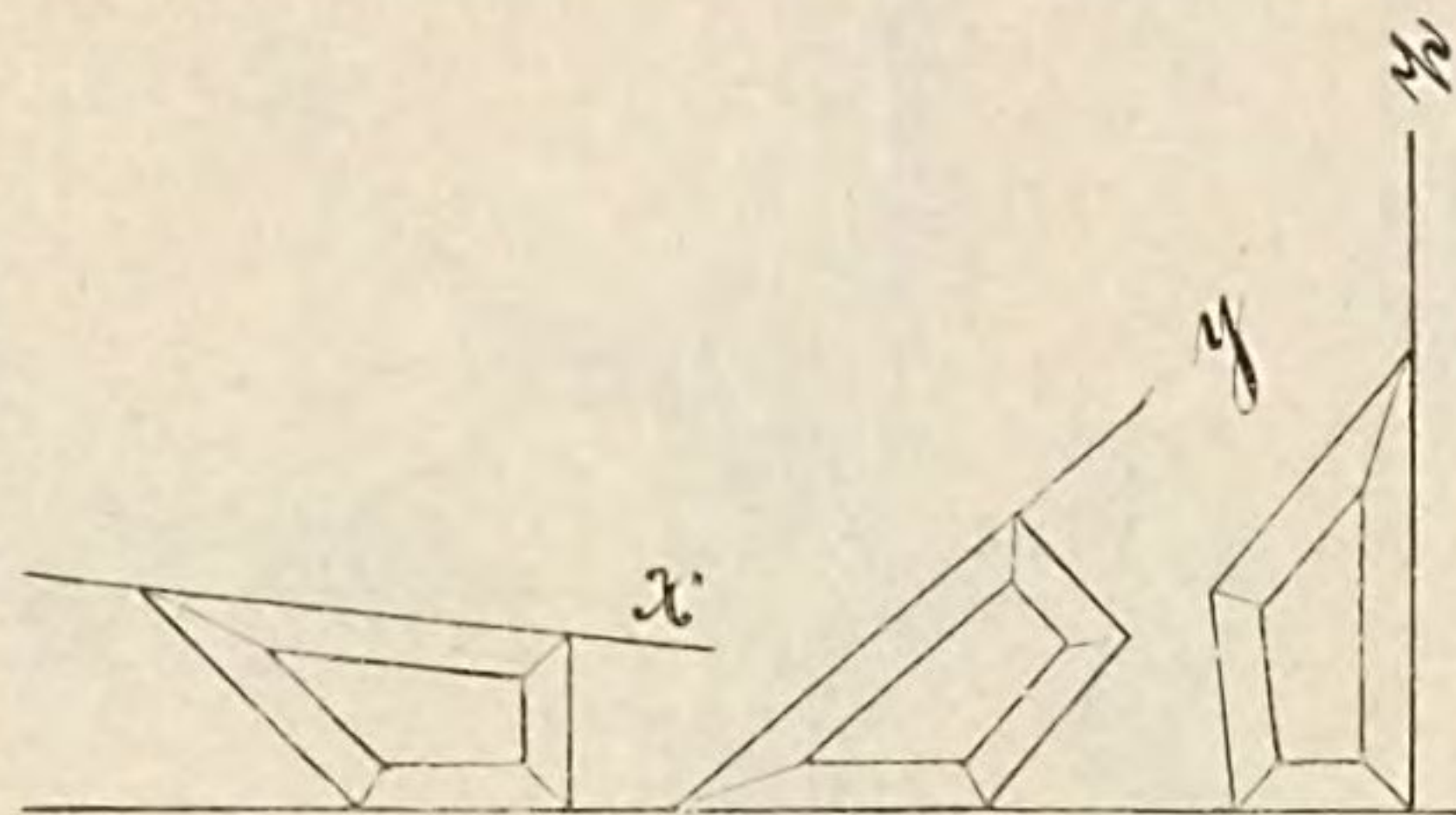
(Mehmke.)

99a. Präcisionsmasstab von Prof. **A. Roucole** in Toulouse; Verlagsbuchhandlung **Ch. Delagrave**, Paris.

Universalmasstab für Perspectivconstructionen.

*) s. Mehmke, Neue Methode, beliebige numerische Gleichungen mit einer Unbekannten graphisch aufzulösen. Civilingenieur Bd. XXXV, S. 617, 1889.

- 99b. Winkel für Axonometrie** nach Angabe von Professor **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt. **Albert Martz**, Fabrik von Zeichen- und Malutensilien, Stuttgart.



das Ziehen beliebiger Parallelen zu den Projectionen der Coordinatenachsen ermöglicht.

Der Gebrauch erhellt aus obiger Abbildung.

(Mehmke.)

Diese Winkel erleichtern die Herstellung parallelperspectivischer Zeichnungen nach der Methode der orthogonalen Axonometrie, indem jeder von ihnen für eine bestimmte Projectionsart — es sind die gebräuchlichsten, wie $1:\frac{1}{2}:1$, $1:\frac{1}{3}:1$, $\frac{3}{4}:\frac{3}{4}:1$, $\frac{9}{16}:\frac{1}{2}:1$, $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}:1$ vertreten —

- 99c. Perspectivlineal.** Von **W. F. Stanley**. Math. mech. Institut, London.

- 102a. Zeichnungen zum Kegelschnittzirkel** von Oberlehrer **Hildebrandt** in Braunschweig.

Dem Instrumente ist eine Anzahl von Zeichnungen beigelegt, welche sämtlich mit Hilfe des Zirkels entworfen sind und die Leistungsfähigkeit desselben veranschaulichen sollen. Es sind auf ihnen einzelne Kegelschnitte, sowie Scharen und Büschel dargestellt. Verschiedene Curven wurden auf ihre Genauigkeit geprüft; die Abweichungen betragen nur Bruchteile von Millimetern.

Ferner ist dem Zirkel ein Maassstab beigegeben, der mit Vorteil dann gebraucht wird, wenn es sich darum handelt, Curven von vorgeschriebener Gestalt und Grösse zu entwerfen. Die Anwendung desselben ist im beigegebenen „Nachtrage zur Gebrauchsanweisung“ beschrieben.

Weitere Blätter enthalten eine einfache graphische Lösung einiger Fälle des Apollonischen Berührungs-Problemes.

(Vergl. noch die Aufsätze von Prof. *E. Fischer*. Dingler, Bd. 282 und 287).

(Hildebrandt).

- 103a. Elliptographen** nach Angabe von Prof. **Th. Alexander**, Trinity College Dublin und **A. Thomson**, Science College Poona.

Die wesentlichste Vervollkommnung dieser Elliptographen besteht in der Einführung einer Führungsstange, welche die Reissfeder genau in der Richtung der zu zeichnenden Curve führt. Fig. 1 zeigt die Vorrichtung für die gewöhnlichen Elliptographen. Der Kopf der Nadel Q befindet sich hierbei stets genau auf der instantanen Axe des (virtuellen) rollenden Kreises und ebenso die Nadel QC stets normal zur beschriebenen Curve. In C können eine gewöhnliche Reissfeder oder auch Punktirradchen angebracht werden.

Fig. 1.

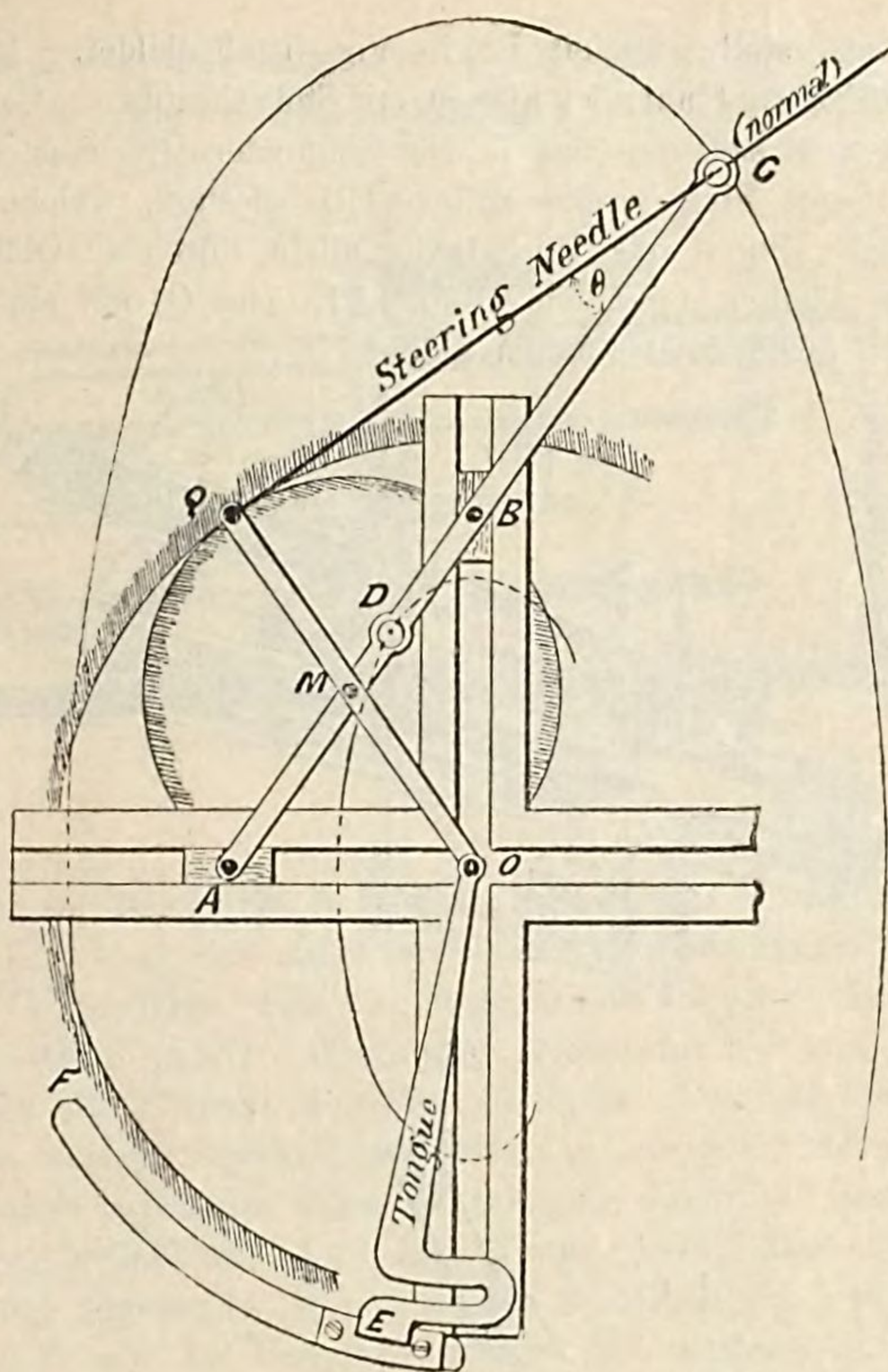


Fig. 2.

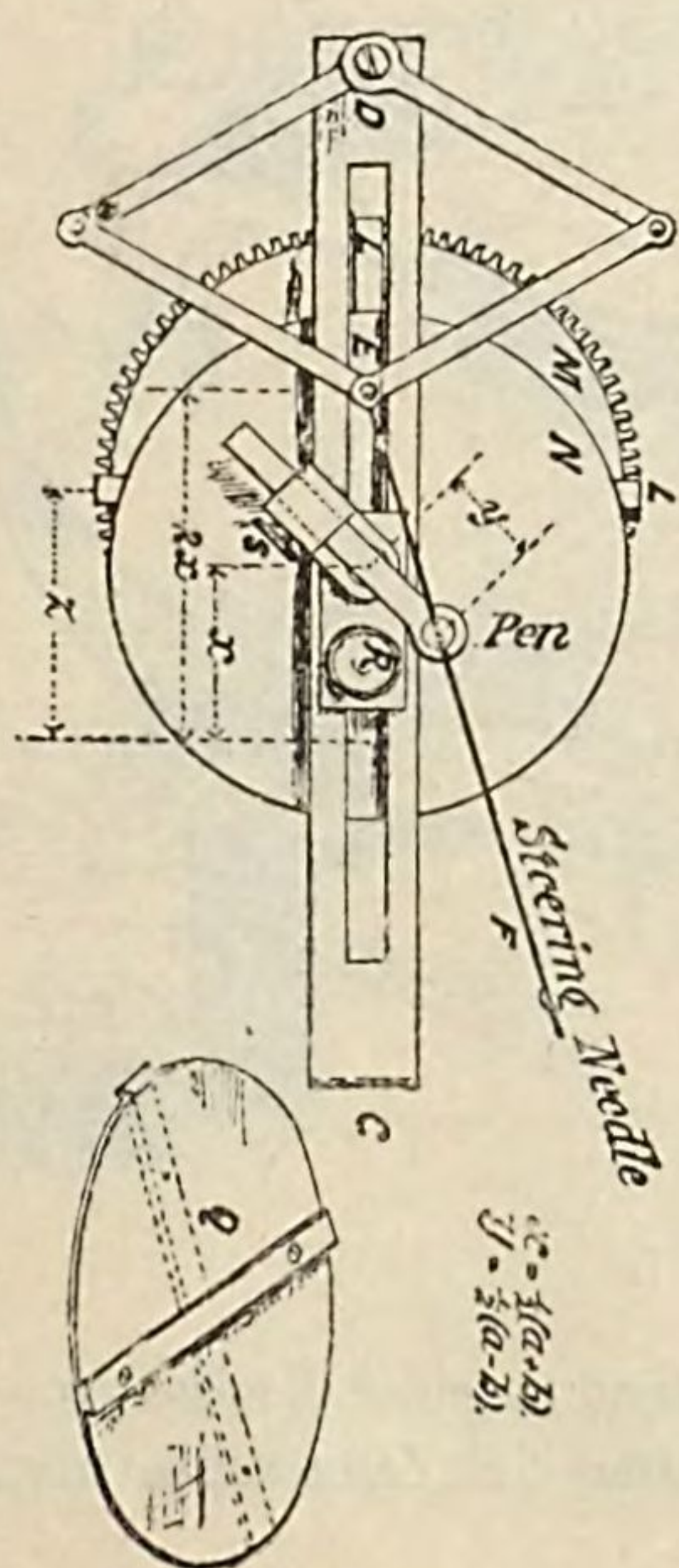
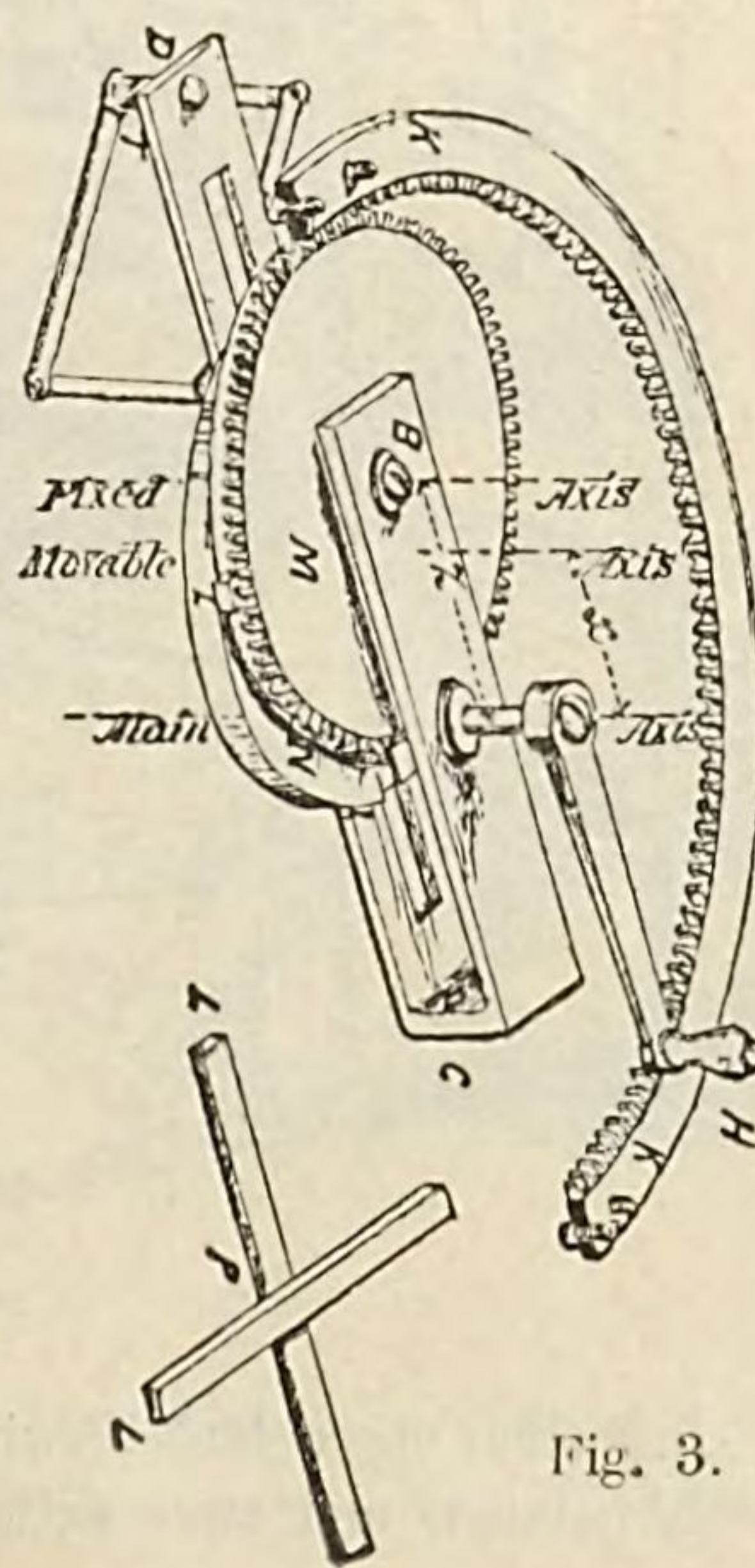


Fig. 3.



oder eine Kette ohne Ende (Fig. 4) oder endlich die gewöhnliche Vorrichtung (Fig. 5), wie bei dem ausgestellten Modell. Der Stab AABK bewegt

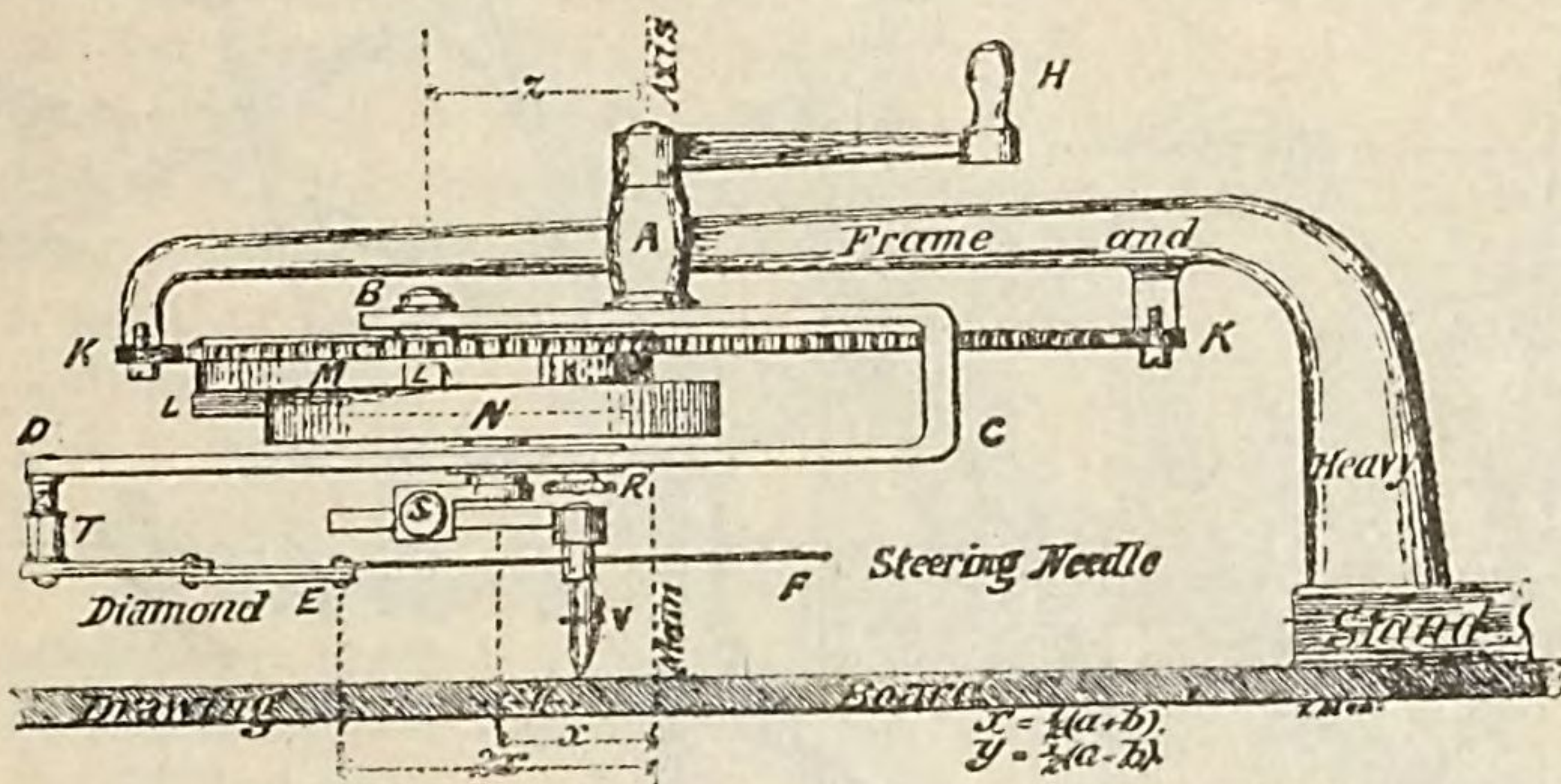


Fig. 5.

sich hier so, dass Punkt A in einer Nute gleitet, B auf einem Kreise geführt wird. K bewegt sich auf einer Geraden hin und her, wobei die Führungsstellen VV bewirken, dass der Mechanismus bei seiner Bewegung die toten Punkte richtig passiert. Würde der Zeichenstift auf dem Rade M fest sein, so hätten alle Ellipsen denselben Rollkreis. Desshalb ist der Zeichenstift auf dem Rade N angebracht, so dass der „virtuelle“ rollende Kreis beliebig vom Radius 0 bis zur vollen Grösse, die durch die Dimensionen des Instruments bedingt ist, abgeändert werden kann. Die Art, wie die Führungsstange angebracht ist, ist in Fig. 3 ersichtlich. Die Entfernung des Knopfes E von der Haupttaxe beträgt das doppelte der Entfernung vom Mittelpunkt des Rades n. Der Radius des (virtuellen) rollenden Kreises ist $x = \frac{1}{2}(a+b)$, während die Entfernung $y = \frac{1}{2}(a-b)$ ist. So lassen sich die Axen a und b beliebig variiren.

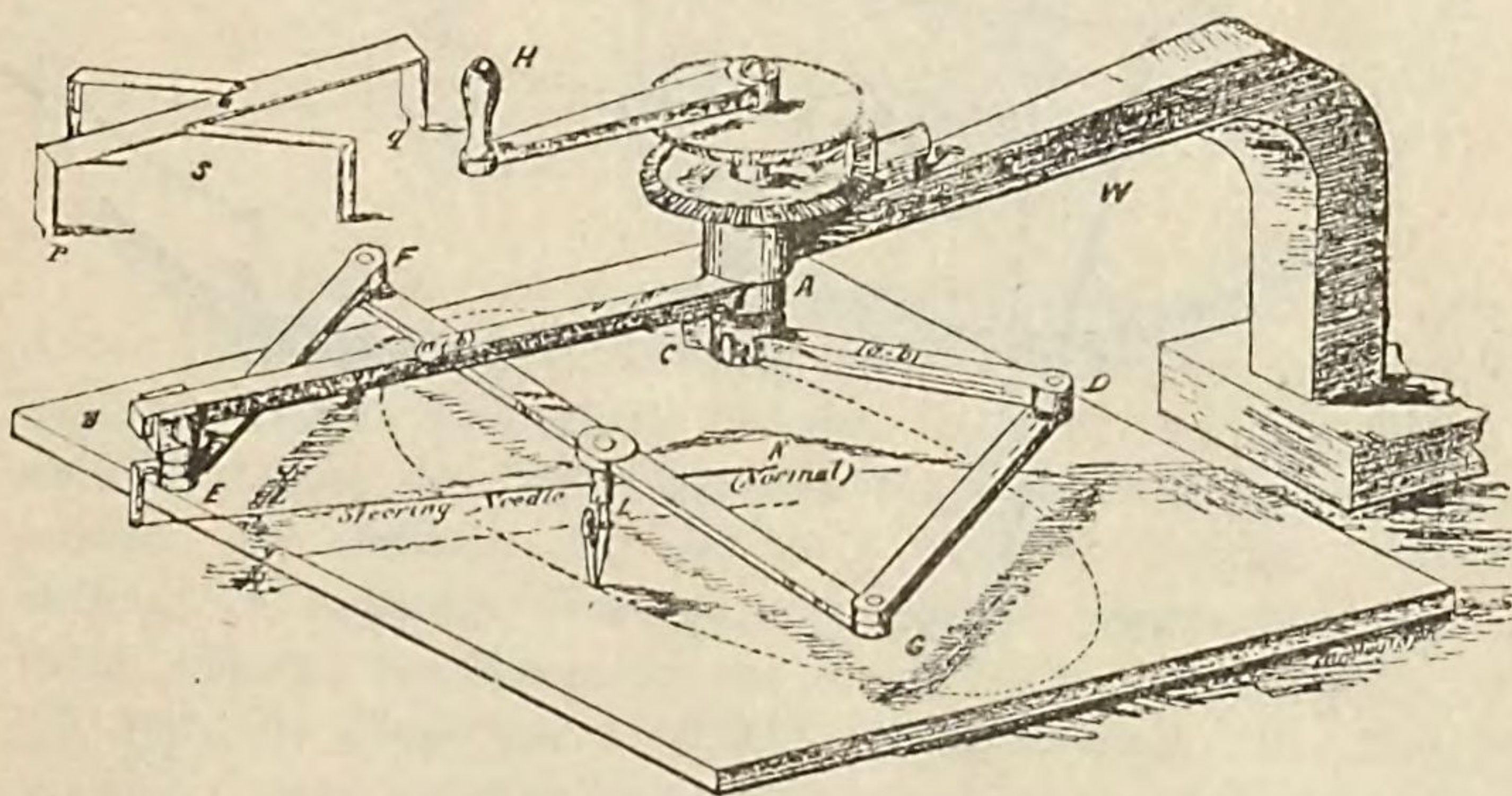


Fig. 6.

Die Figuren 6 und 7 geben andere Formen von Elliptographen. Dadurch, dass man die Peaucellier-Führung mit dem Mechanismus Fig. 6

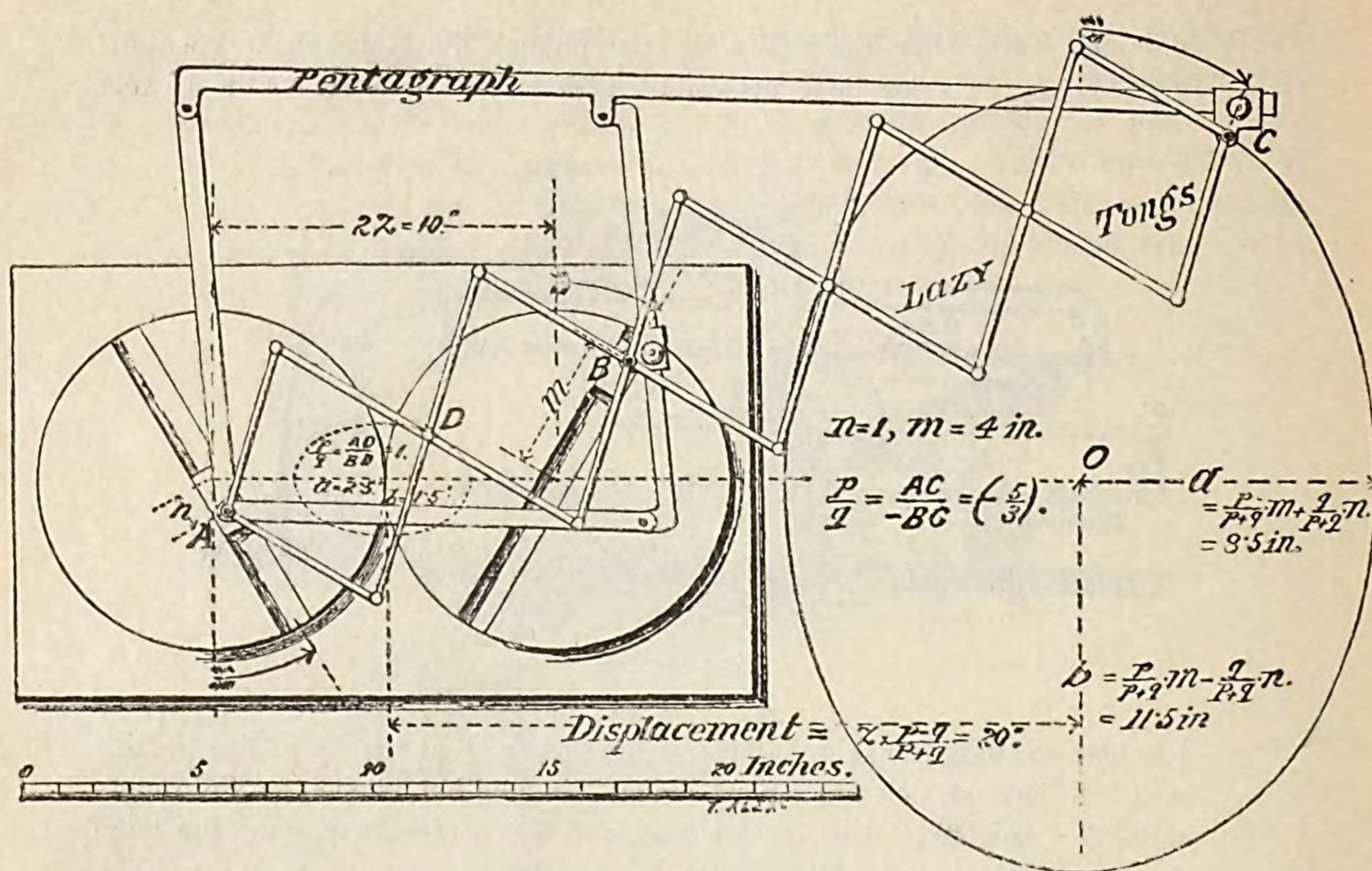


Fig. 7.

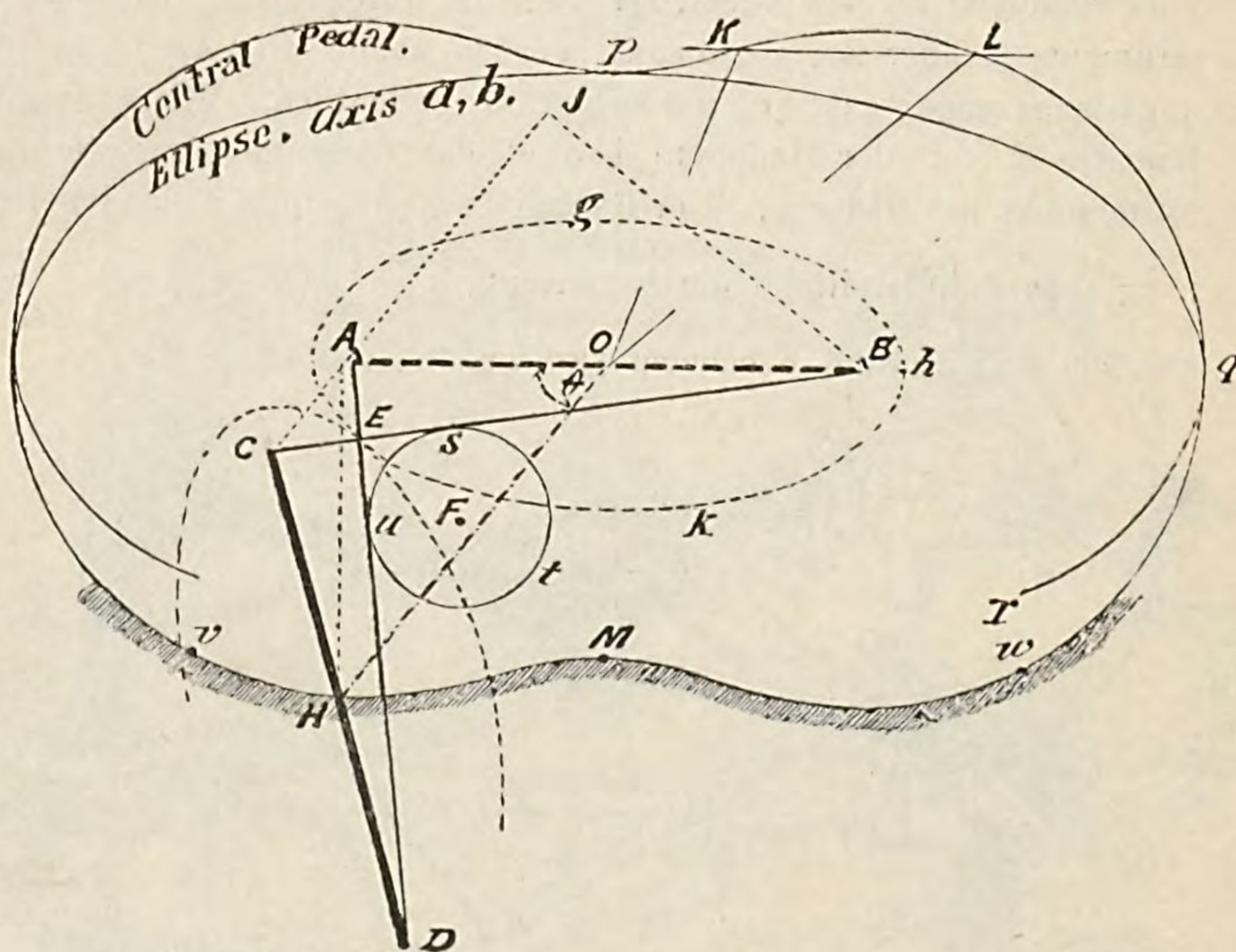


Fig. 8.

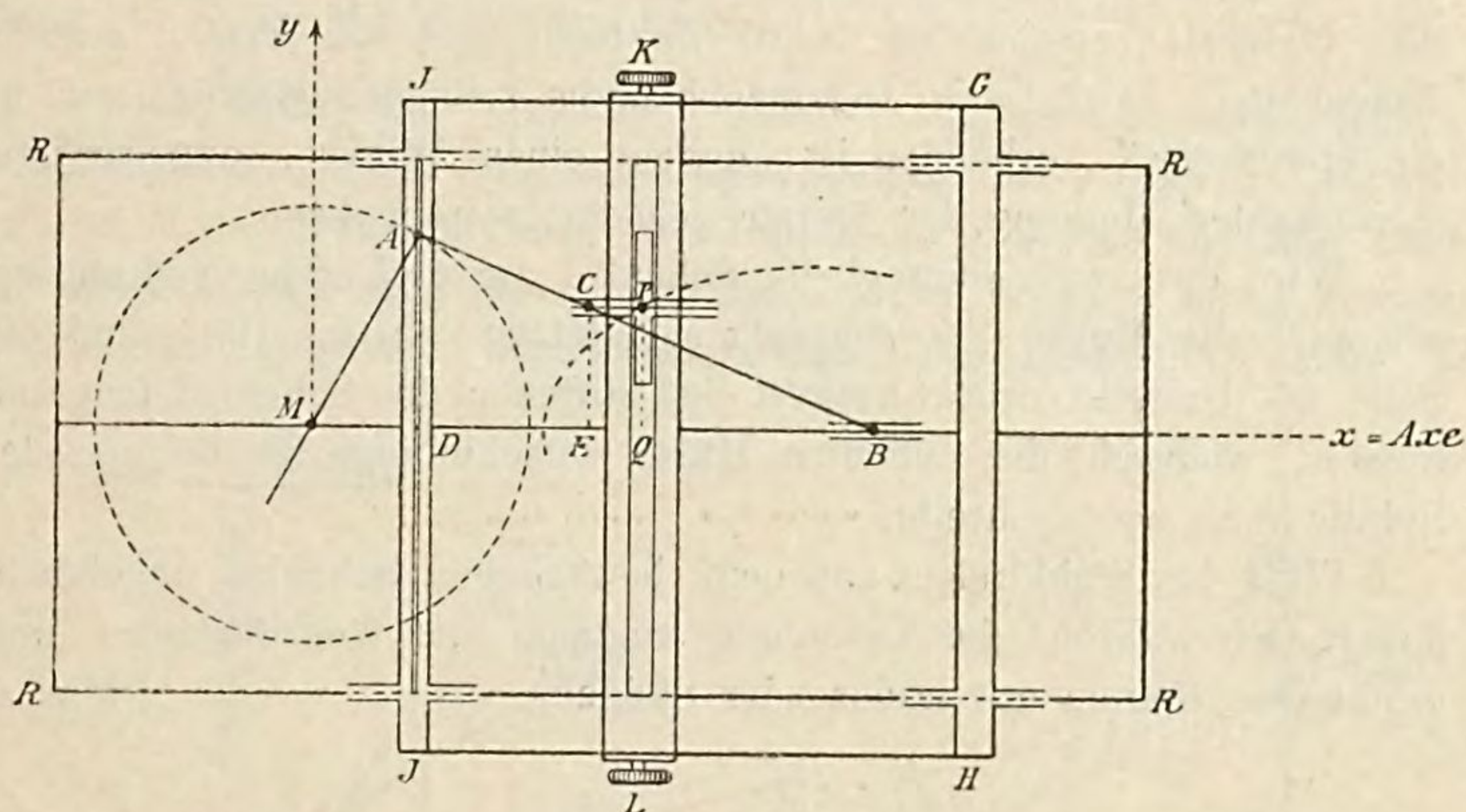
verbindet, erhält man einen Apparat zur Erzeugung einer rationalen Curve vierter Ordnung (die durch Transformation durch reciproke Radien aus einem Kegelschnitt hergeleitet werden kann). In Fig. 7 beschreibt der Punkt C eine Ellipse, wenn die Räder A und B sich mit gleicher Geschwin-

digkeit in entgegengesetzter Richtung drehen. Wenn man aber die Uebertragung so bewerkstelligt, dass das eine Rad sich wenig schneller dreht, so dreht sich auch so zu sagen die Axe jener erst erzeugten Ellipse, wie bei den Lissajous-Curven. Drehen sich die Axen A und B mit gleicher Geschwindigkeit in derselben Richtung, so beschreibt C einen Kreis vom Radius OC, und wenn jetzt das eine Rad etwas schneller läuft als das andere, so beschreibt C eine Spirale, deren Radiusvector zwischen den Grenzen a und b zu und abnimmt. Man kann den Apparat etwa verwenden beim Schleifen von Linsen, indem man in C die Polirvorrichtung anbringt, oder auch z. B. zur Regulirung einer Dampfmaschine, bei der die Räder A und B mit gleicher Geschwindigkeit laufen sollen.

Die ausgestellten Modelle sind Eigentum der irischen Akademie und ausführliche Beschreibung in den Transactions derselben Band 29 Teil 19. (Separatabzug zum Preis von 2,50 M. in der Akademie, 19, Dawson street Dublin, Ireland.) (Alexander, Thomson.)

Ellipsenzirkel (D. R. P.) von W. Lehner, stud. mech., techn. Hochschule München.

Mit Hilfe des Kreises MA wird eine Ellipse PP dadurch erzeugt, dass die Abscissen MD des Kreises ihrer Grösse nach die Abscissenverschiebungen des Punktes P werden, die Ordinaten AD jedoch in constantem Verhältnisse verkürzt werden.



Die Abscissen von P werden dadurch bestimmt, dass ein Zapfen A den Schlitten FGHI in Richtung der x-Axe verschiebt, indem A in dem Schlitz AD und der Schlitten auf dem festen Rahmen RR gleitet. KL ist nach Einstellung des Zirkels mit dem Schlitten durch Schrauben fest verbunden. Die Ordinaten PQ sind durch Punkt C bestimmt, der nach Einstellung des Apparates eine feste Lage auf der constanten Strecke AB hat indem während der Bewegung von A der Punkt B längs der x-Axe gleitet, gilt stets die Proportion $AD:CE = AB:CB = \text{const.}$ Die Bewegung des Punktes C wird auf den Punkt P vermittelt eines Gleitstückes übertragen, mit welchem Punkt P fest verbunden ist, und das sich zunächst im Schlitz KL frei bewegen kann; durch den in der Rille CP (CP parallel zur x-Axe) sich bewegenden Zapfen C erhält Punkt P eine bestimmte Ordinate $PQ=CE$ zugewiesen.

Die Ordinaten PQ sind daher aus den Ordinaten AD des Kreises durch Verkürzung in dem constanten Verhältnisse $CB:AB$ erhalten und P beschreibt eine Ellipse.

Die Halbaxen können am Apparat unmittelbar eingestellt werden; wenn $MA \perp MB$ ist, so ist der Radius MA gleich der einen, die Strecke PQ gleich der andern Halbaxe. Der Radius MA kann durch Verkürzung oder Verlängerung in M auf verschiedene Länge gebracht werden; die andere Halbaxe PP kann beliebig variiert werden, wenn die Schrauben K und L gelüftet sind, da auch Zapfen C nur durch eine Schraube mit AB verbunden wird. (K. Fischer.)

105a. Parabelzeichner, construiert und ausgestellt von Ingenieur **K. A. Mayer** an der Handw.- u. Kunstgewerbe-Schule in Hannover.

Der Apparat beruht auf dem Satze: Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so, dass die Summe seiner Abstände in Bezug auf eine in derselben Ebene liegende Gerade und einen festen Punkt dieser Geraden constant bleibt, so entsteht eine Parabel. (K. A. Mayer.)

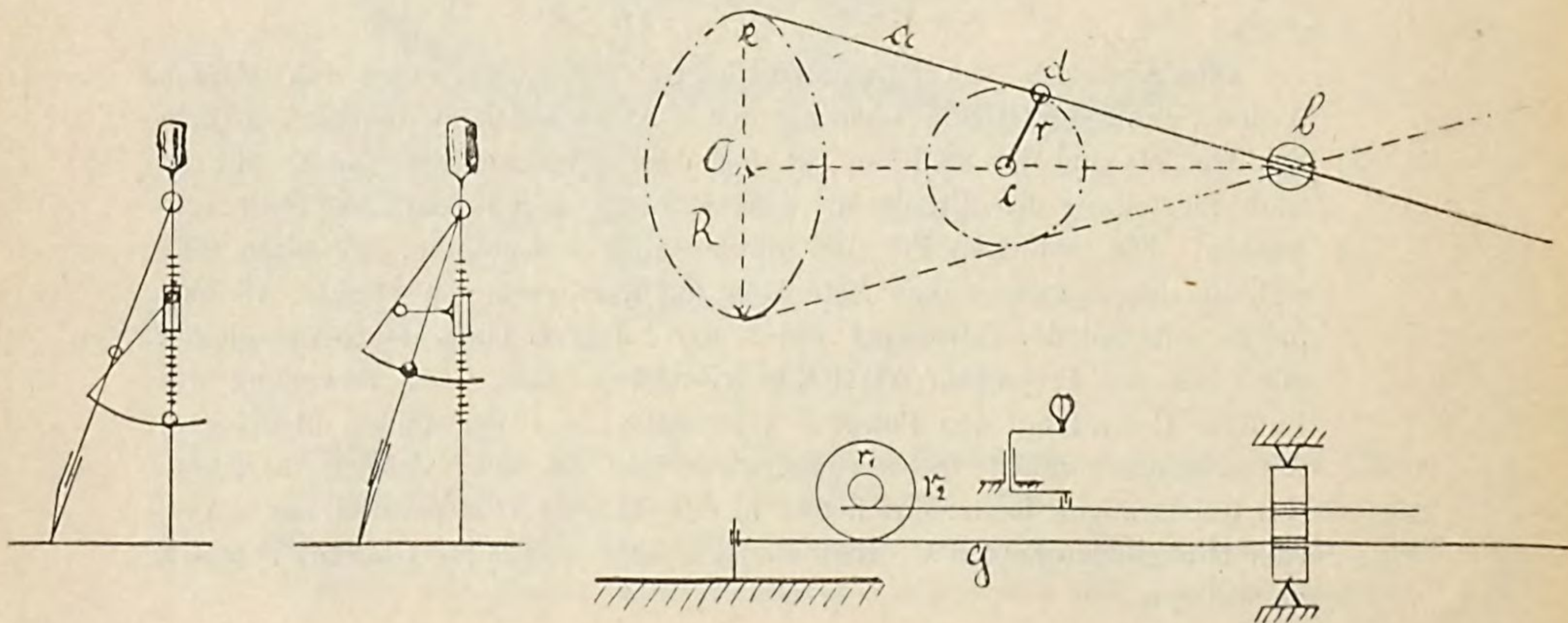
107a. Spiral-Zirkel nach **Feldmaier**, gefertigt und ausgestellt von **M. Ott**, Werkstätte für Präcisionsmechanik, München.

Aus nebenstehender Skizze ist die Form des Zirkels ersichtlich.

Der eine Schenkel, welcher in seinem mittleren Teil mit stark steigendem Gewinde versehen ist, wird senkrecht auf das Papier gestellt und festgehalten. Auf dessen Gewinde befindet sich eine Mutter, mit welcher ein Stahldreieck verbunden ist, dessen einer Winkel, entsprechend der gewünschten Steigung der Spirale geändert werden kann.

Wird der zweite bewegliche Schenkel um den ersten gedreht und damit auch die Mutter, so schraubt sich letztere in die Höhe und die eine Seite des Dreiecks drückt mittelst des Stiftes m den Schenkel langsam nach aussen, wodurch die auf einer Hülse verschiebbare Zeichnungsfeder eine Spirale $r = z\varphi$ beschreibt.

Wird das Stahldreieck an dem beweglichen Schenkel angebracht, so ändert sich während der Bewegung zugleich der Angriffswinkel und man erhält eine Spirale mit wachsender Steigung. (Max Ott.)



107b. Mechanismus zum Zeichnen von Kreisen und Spiralen von einem Punkt ausserhalb des Centrums, nach Professor **Cerebotani**, ausgeführt von **M. Ott**, Werkstätte für Präcisionsmechanik, München.

Wird ein Stab a derart gelagert, dass er sich in einer drehbaren Hülse b verschieben kann, und dann mittelst einer um den festen Punkt c drehbaren Kurbel r bewegt, so beschreibt irgend ein Punkt e des Stabes eine Cardioide, von welcher der eine ovalförmige Teil in der Figur gezeichnet ist. Bezeichne nun R die Entfernung des Berührungspunktes des Stabes in seiner Grenzlage mit der Curve, wie von der Mittellinie; vergrössert man dann den Weg, welchen Punkt e macht, in der Längsrichtung dem Verhältnis $bc:co$ entsprechend, so beschreibt e einen Kreis vom Radius R .

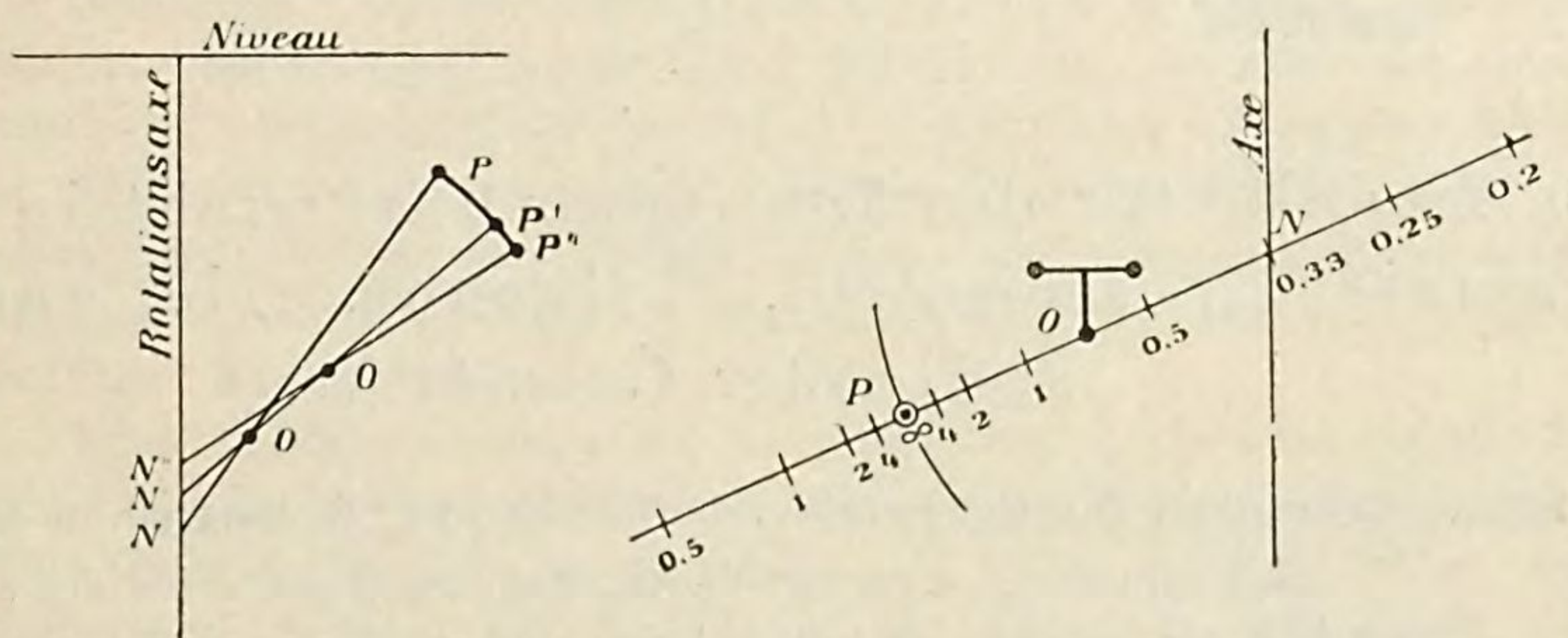
Dies wird dadurch erreicht, dass man die Antriebsstange in ein kleines Zahnrad r_1 eingreifen lässt, welches mit einem grösseren Zahnrad r_2 fest verbunden dem Stab g die gewünschte vergrösserte Längsbewegung erteilt, da sich $r_1:r_2 = co:bc$ verhält.

Das Zeichnen von Spiralen wird dadurch ermöglicht, dass man die Länge des Hebels r während der Drehung sich ändern lässt.

(M. Ott.)

107c Apparat zum Zeichnen von Curven aus ihrer Krümmung. Von **C. V. Boys**, A. R. S. M., F. R. S. London.

Lord *Kelvin* hat folgendes Verfahren zur Verzeichnung irgend einer Capillaritätsfläche die zugleich Rotationsfläche ist gegeben: „Durch einen Punkt N der Axe zieht man eine Gerade NP , welche die Axe unter beliebigem Winkel schneidet. Um irgend einen Punkt O dieser Geraden als Mittelpunkt beschreibe man einen kleinen Kreisbogen PP' . Es sei N' der



Punkt, in welchem OP' die Axe schneidet. Man messe NP , $N'P'$ und die Differenz δ der Abstände der Punkte P und P' vom Niveau der Flüssigkeit. α sei ein linearer Parameter. Dann werde der Ausdruck

$$\left(\frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{1}{OP} + \frac{1}{NP} - \frac{1}{N'P'} \right)^{-1}$$

berechnet, die entsprechende Länge in den Zirkel genommen und von P , aus auf OP' abgetragen. Um den so bestimmten Punkt O' beschreibe man einen zweiten kleinen Kreisbogen $P'P''$ und setze das Verfahren in gleicher

Weise fort. Die kleinen Kreisbogen werden dann eine Curve, nämlich den Meridian einer die Flüssigkeit begrenzenden Rotationsfläche bilden“.

(Geometrisch ausgedrückt, handelt es sich um die Ermittlung einer Rotationsfläche, deren mittlere Krümmung proportional ist der Entfernung eines Punktes von einer zur Axe senkrechten Ebene).

Herr *Boys* (Phil. Magazine for. July 1893) hat nun einen Apparat construirt, welcher einerseits die Construction der kleinen Kreisbögen andererseits die Berechnung des obigen Ausdruckes erleichtert. Er besteht aus einem Celluloidstreifen der von einem mit ∞ bezeichneten Punkte nach beiden Seiten eine Teilung trägt, deren Bezifferung nach den reciproken Entfernungen vom Punkt ∞ fortschreitet. Der Punkt ∞ trägt eine Bleistiftspitze, welche die Curve beschreiben soll. Das momentane Centrum für die kleine Drehung des Celluloidstreifens, welcher zur Beschreibung eines kleinen Kreisbogens dient, wird durch die eine Spitze eines kleinen Dreifusses gebildet, dessen andere Spitzen zur Befestigung auf dem Zeichenbrett dienen. Infolge der eigenthümlichen Teilung des Streifens lassen sich die Grössen $\frac{1}{OP}$, $\frac{1}{NP}$ und $\frac{1}{N'P'}$ unmittelbar am Streifen ablesen. Durch Summation ergibt sich der reciproke Wert des Kelvinschen Ausdrucks, der dann gleich wieder directe Anwendung zur Aufsuchung des neuen Momentancentrums auf dem Streifen findet. Man sieht leicht ein, dass man auf ähnliche Weise beliebige Curven construiren kann, deren Krümmungsradius in einfacher Beziehung zur Länge der Normalen steht. z. B. elastische Linien, Cykloiden, Kettenlinien und ihre Evoluten und Kegelschnitte.
(Finsterwalder.)

- 108** **Perspectograph** von **M. Stühler**, verfertigt von **W. G. Dinkelmeyer** (Nürnberg), ausgestellt von **A. Brugger**, München.

Der in Nr. 108 des Hauptkataloges beschriebene Apparat in 4 Ausführungen.

J. Modelle für den Elementar-Unterricht in Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie und darstellender Geometrie.

- 120a.** **Lehrmittel für Geometrie** von Oberlehrer **C. G. Kummer** in Dresden.

Eine Sammlung einfacher Veranschaulichungsmittel für den ersten geometrischen Unterricht an Volksschulen und an den unteren Classen höherer Lehranstalten.

- 127 a** **Drei Reliefperspectiv-Modelle** aus Gyps von Prof. **L. Burmester**, Mathematisches Institut und Sammlung für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in München.

Modell Nr. 1 enthält die reliefperspectivische Darstellung typischer Körper: Würfel mit Kegel, Cylinder mit Kugel und architektonisch gegliederten Obeliskten.

Modell Nr. 2. Reliefperspectivische Darstellung einer Bogenhalle.

Modell Nr 3. Reliefperspectivische Darstellung einer romanischen Basilika.

Der Augpunkt ist auf diesen Modellen durch ein rothes Kreuz markirt und die Augdistanz ist auf der Modell-Etiquette angegeben. *)

(L. Burmester.)

127b. Sammlung von 20 Original-Photographien mit Einzeichnungen zur Untersuchung der Perspective in Bildern alter Meister von Prof. L. Burmester. Sammlung für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in München.

Die Schönheit eines Bildes ist in vielen Fällen berechtigt, mannigfaltige Abweichungen von den Perspectiv-Gesetzen nicht nur in den figuralen Beziehungen, sondern auch in den geometrischen Gestaltungen zu fordern; und der Maler muss deshalb von seinem Kunstgefühl geleitet auf dem Wege der Compromisse zwischen den Bedingungen der Aesthetik und der Perspective seinen erhabenen Zweck, die Schönheit, erreichen.

Alle Abweichungen von den Gesetzen der Perspective sind künstlerisch vollberechtigt und nicht als Fehler zu betrachten, wenn diese Abweichungen von der Schönheit des Bildes gefordert werden und so geordnet sind, dass dieselben nicht im bemerkbaren Widerspruch mit unserer perspectivischen Anschauung stehen, die wir durch die Beobachtung in der Wirklichkeit empfangen haben.

In dieser Auffassung sind die Einzeichnungen und Erläuterungen auf den Bildern zu betrachten.

(L. Burmester.)

128a. Historische Notiz über die Modellsammlung von Muret.

Der Ursprung der Modellsammlung von Muret, herausgegeben von *Delagrave* geht auf etwa 70 Jahre zurück, auf die Zeit, in welcher *Monge* sein berühmtes Werk über die descriptive Geometrie erscheinen liess. Damals war *Bardin* Eleve an der Ecole polytechnique. Er wurde bei seinem Austritt aus der polytechnischen Schule zum Professor der Mathematik an der École d'application zu Metz ernannt und erkannte hier sofort die Schwierigkeit, welche seine Zuhörer in der räumlichen Anschauung fanden und suchte von da ab durch die Herstellung specieller Modelle „das Lesen im Raum“ zu erleichtern.

Solche Modelle erwiesen sich im Unterrichte wie in wissenschaftlicher Arbeit als ein wichtiges Hilfsmittel; aber *Bardin*, welcher unausgesetzt in dieser Richtung für die grossen Schulen, an denen er lehrte, thätig war, sorgte nicht genügend für die Verbreitung seiner wichtigen Arbeit; dies führte erst sein Nachfolger *Muret* aus, der 13 Jahre lang Schüler und später Mitarbeiter *Bardins* gewesen war. Nach dem Tode *Bardins* 1868 begann *Muret* zunächst damit, das beträchtliche Werk seines Lehrers zu ordnen, wieder herzustellen und zu vervollständigen und es den verschiedenen Aufgaben des Unterrichtes anzuschliessen; dabei unterstützte ihn ein junger Verleger *Delagrave*, der gleich ihm mit vollem Eifer für diese Neuerung eintrat und in der Folge sich in diesem Zweige weithin bekannt machte.

*) Vergl. *Burmester*, Grundzüge der Reliefperspective. Leipzig 1883.

Die heutzutage überall angewandte Methode des Anschauungsunterrichtes liess sich aber damals nicht ohne Schwierigkeit und äusserste Anstrengung einführen. (Muret.)

K. Polyeder, Polygon- und Polyederteilung von Flächen und Räumen.

132a 16 Modelle: Herstellung der Platonischen Körper aus Papierstreifen von Privatdozent H. Wiener, Mathematisches Institut der Universität Halle a/S.

1. Wie man in einem Blatt Papier durch Zusammenfalten eine Gerade herstellen kann, und durch Aufeinanderlegen der zwei Hälften dieser Geraden eine dazu senkrechte Gerade erhält, so lassen sich *ohne Hilfe von Zirkel und Lineal*, allein durch Zusammenfalten aus einem Papierstreifen, der auf den Seiten durch zwei parallele Kanten begrenzt ist, das Quadrat und das regelmässige Dreieck und Fünfeck herstellen; und aus ihnen können durch richtiges Aneinanderfügen dieser Vielecke und durch Zusammenkleben die 5 Platonischen Körper gewonnen werden.

2. Das *Quadrat*. Legt man den Papierstreifen so zusammen, dass jede Kante in zwei Hälften mit sich selbst zur Deckung gelangt, so erhält man eine kurze Knick-Kante, die senkrecht auf den (jetzt doppelt liegenden) Seitenkanten steht. Halbt man an einer der Streifenhälften, die in der Knickkante zusammenstossen, den rechten Winkel, indem man seine beiden Schenkel aufeinanderlegt, nämlich die eine Seitenkante auf die Knickkante, so erhält man ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck, über dem ein congruentes Dreieck liegt. Knickt man nun von den beiden Streifenhälften, die jetzt einen rechten Winkel bilden, abwechselnd die eine und die andere um, indem man stets die Längskante der einen als Knickkante der anderen benützt, so erhält man eine Reihe von Quadraten, deren mittelstes aus den beiden Dreiecken besteht. [Nr. 1 u. 2]

3. Den *Würfel* erhält man, indem man die beiden Dreiecke aufeinander klebt und an jeder Streifenhälfte vier von den angebogenen Quadraten zu einer Zone des Würfels verwendet; das vierte Quadrat einer jeden dieser Zonen klebt man auf das erste Quadrat, das durch die Dreiecke nur zur Hälfte ausgebildet ist. Die beiden Zonen überkreuzen sich noch in einer Fläche, in der die beiden Quadrate ebenfalls auf einander geklebt werden, [Nr. 7.]

4. Um den Winkel von 60° — und daraus das *gleichseitige Dreieck* — zu construiren, drittele man den gestreckten Winkel, indem man an irgend einem Punkte des einen Streifenrandes sowohl die eine, wie die andere Hälfte dieses Randes umlegt. Dabei entstehen zwei Knicklinien; an die erste wird die zweite Hälfte des Randes, an die zweite die erste Hälfte des Randes angelegt. Dadurch sind aus dem gestreckten Winkel drei gleiche Winkel gemacht, nämlich der zwischen den Knicklinien liegende, gleich denen zwischen je einer Knicklinie und einer Randhälfte liegenden

Winkeln. Es bedarf nur einer kurzen Übung, um die zuerst vorläufig gewählten Knicklinien mit geringer Verschiebung in die verlangte Lage zu bringen. [Nr. 3.]

Aus dem Winkel von 60° entsteht durch weiteres Umknicken des Streifens ein regelmässiges Dreieck, und daraus dann beliebig viele. Dabei lege man erst das eine Ende des Streifens in solche Dreiecke, und hierauf erst das zweite. [Nr. 4.]

5. Zum *Tetraeder* nehme man fünf regelmässige Dreiecke des Streifens und klebe das letzte auf das erste. [Nr. 9.]

6. Zum *Oktaeder* genügen sieben solcher Dreiecke, von denen das letzte auf das erste geklebt wird, falls man sich auf eine Zone des Oktaeders beschränkt, so dass zwei gegenüberliegende Seitenflächen fehlen. [Nr. 8.]

Zum vollen Oktaeder bilde man zuerst (aus 7 Dreiecken) eine Zone, das achte Dreieck klappe man um, klebe es auf das vorhergehende und lasse eine zweite Zone folgen. Wo zwei Dreiecke verschiedener Zonen übereinander zu liegen kommen, klebe man sie zusammen. Da schon das vorletzte Dreieck der zweiten Zone auf ein Dreieck der ersten Zone zu liegen kommt, genügen 13 statt 14 Dreiecke des Streifens. Analoge Bemerkungen gelten für die folgenden Körper, bei denen sich durch Zerstückeln des Streifens die Zahl der notwendigen Flächen noch verringern lässt. [Nr. 10.]

7. Zum *Ikosaeder* stelle man zuerst eine Zone von 10 Dreiecken her, indem man das elfte Dreieck des Streifens auf das erste klebt. Das zwölfte Dreieck klappe man um und klebe es auf das erste (elfte), und lasse es als Anfangsdreieck einer neuen Zone dienen, deren Enddreieck (das 22.) wieder über das erste zu liegen kommt. Eine dritte, in gleicher Weise angefügte Zone, vollendet den Körper, der so aus 33, in dem Streifen aneinandergeordneten Dreiecken gebildet ist. [Nr. 13.]

8. Am überraschendsten ist die Anfertigung des *regelmässigen Fünfecks* und des regelmässigen Dodekaeders. Von einem solchen Fünfeck wird durch eine Diagonale ein axenspiegeliges Viereck (Antiparallelogramm) abgeschnitten, dessen Winkel $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$ des gestreckten Winkels betragen, so dass man zwei solche Vierecke in der Weise aneinanderlegen kann, dass die parallelen Gegenseiten die Verlängerungen der parallelen Gegenseiten des anderen bilden — und ebenso lässt sich eine beliebige Anzahl solcher Vierecke in einen Parallelstreifen aneinanderlegen, die ihre breitere Basis abwechselnd in der oberen und unteren Kante des Streifens haben.

Knickt man in der Reihe das zweite Viereck um die Kante um, mit der es an das erste stösst, so legen sich beide in ein regelmässiges Fünfeck aufeinander. Knickt man ebenso das 3., 4., 5. um, so legen sich alle in dasselbe Fünfeck ein (das 6. legt sich dann congruent über das erste).

Diese Figur der 5 zu einem regelmässigen Fünfeck übereinandergelegten Vierecke lässt sich ohne weiteres aus dem Papierstreifen herstellen: Man mache in den Papierstreifen einen Knoten, ziehe ihn langsam zu und drücke die übereinanderliegenden Teile des Streifens in die Ebene, indem man darauf achtet, dass die beiden Enden des Streifens an der Stelle, wo sie austreten, ohne Spielraum anliegen. Auch hier genügt eine geringe Übung, um die nötige Genauigkeit zu erzielen. [Nr. 5.]

Auf das fertige Fünfeck falte man zuerst die eine (später die andere) Hälfte des Streifens zu solchen Vierecken auf, wie sie oben beschrieben sind. Dies geschieht, indem man die Knickkante und die kürzere von den parallelen Gegenkanten des Vierecks mit zwei Seiten des Fünfecks, die breite Basis mit der Diagonale zur Deckung bringt. [Nr. 6.]

9. Um nun das regelmässige Dodekaeder zu bekommen, ist es nicht nötig, fertige Fünfecke zusammenzusetzen, sondern die Reihe der Vierecke genügt. Man bilde eine aus 6 Vierecken bestehende Zone dadurch, dass man das 7. auf das erste klebt. Knickt man dann das 8. Viereck um, so legt es sich halb auf das 1. (7.) und so entsteht das erste Fünfeck. Die mit dem 8. Viereck beginnende zweite Zone schliesst im ganzen vier Paare von Vierecken zu je einem Fünfeck zusammen, die ebenso angefügte 3. und 4. Zone je zwei und die 5. Zone die 4 noch fehlenden Fünfecke und damit ist das Dodekaeder fertig. Dabei sind zum ersten Fünfeck 10, zum gegenüberliegenden 5 und zu den übrigen zehn je 2 Vierecke verwandt. [Nr. 16.]

10. Fügt man zu den 35 Vierecken noch ein weiteres bei, so legt es sich umgeknickt congruent über das erste Viereck, so dass eine daran gehängte 6. Zone wieder die 1. Zone überdecken würde. Klebt man das 36. auf das erste und löst alle übrigen Verbindungen, so erhält man ein *geschlossenes Band*, das — weil im Streifen das 36. ungleiche Lage mit dem 1. hat — *einmal gedreht ist* (unter Umständen auch 3-, 5 mal), also im Möbius'schen Sinne eine *einseitige Fläche* darstellt. [Nr. 14.]

In gleicher Weise lässt sich beim Ikosaeder durch Zufügen einer 34. Dreiecksfläche ein einmal verdrehtes, geschlossenes Band herstellen. [Nr. 11.]

Beim Oktaeder ist noch eine dritte Zone hinzuzufügen, dann die 22. Fläche auf die 1. zu kleben, so erhält man ein ebensolches Band. Auch der Würfel lässt sich in zwei Zonen aus einem solchen verdrehten Bande zusammenfalten, das aus 10 Quadraten besteht, von denen das letzte auf das erste geklebt ist und von denen zwei in je zwei Dreiecke zerlegt sind. Wir erhalten das Ergebnis: *Die regelmässigen Körper: Würfel, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder lassen sich aus einem einmal verdrehten geschlossenen Band durch geeignetes Falten und Zusammenkleben herstellen, wenn nur das Verhältnis von Länge und Breite des Bandes für jeden dieser Körper richtig gewählt ist.*

In Nr. 12 und Nr. 15 ist die Art des Zusammenfaltens für Ikosaeder und Dodekaeder dargestellt.

Für das Tetraeder bilden die 5 Dreiecke, von denen das letzte auf das erste geklebt ist, von selbst ein *geschlossenes, aber unverdrehtes Band*.

(H. Wiener)

132b 6 Modelle hergestellt aus Draht mit eingespannten Fäden, nach Angabe von Privatdocent **H. Wiener**, math. Institut der Universität Halle a/S. *)

a) *Die geschlossenen Systeme von Spiegelachsen zur Erzeugung der Bewegungsgruppen der regelmässigen Körper* (Modell Nr. 1 und 2). Nr. 1 stellt die 6 Linien des regelmässigen Oktaeders (Würfels) dar, welche die

*) Schrank Nr. (6).

Mitten der Gegenkanten verbinden, während dieselben Linien des regelmässigen Ikosaeders (Dodekaeders) das Modell Nr. 2 vorzeigt.

Diese Linien bieten ein gruppentheoretisches Interesse dar: in beiden Fällen liegt ein System von Geraden vor, von denen jede an jeder anderen gespiegelt wieder eine Gerade des Systems ergibt; man kann ein solches System als ein geschlossenes System von Spiegelaxen und die Spiegelungen an ihnen als ein *geschlossenes System von Spiegelungen* bezeichnen. An derartigen Spiegelsystemen lassen sich wichtige Operationsgruppen in einfacher Weise herleiten. So erhält man alle Bewegungen der „*Tetraedergruppe*“, indem man die Spiegelungen an jenen 6 Axen zu je zweien zusammensetzt, die der „*Oktaedergruppe*“, indem man hierzu noch die 6 Spiegelungen selbst und die Folgen von je dreien von ihnen zufügt. Bildet man ebenso die Folgen von je zwei Spiegelungen an den in Nr. 2 dargestellten Axen, so erhält man die Bewegungen der „*Ikosaedergruppe*“.

Es sei darauf hingewiesen, dass die geschlossenen Spiegelsysteme wichtige Dienste zur Aufstellung der „regelmässigen Punktsysteme“ bieten, das sind unendliche Punktgruppen, wie sie z. B. in der geometrischen Theorie der Krystallstruktur gefordert werden. Siehe für die Darstellung dieser Gruppen auch die Modelle der vorigen Nummer.

b) *Die höheren regelmässigen Körper (Nr. 3 bis 6).* Modell 3 stellt die zwei einem Würfel eingeschriebenen Tetraeder, Modell 4 die 5 einem Ikosaeder eingeschriebenen Würfel dar. Die Modelle 5 und 6 geben die bekannten vier Poincaré'schen Körper und zwar zunächst Nr. 5 das *zwanzigeckige Sterndodekaeder*, Nr. 6 das *sterneckige Dodekaeder*, womit gleichzeitig die beiden übrigen, das *zwölfeckige Sterndodekaeder* und das *sterneckige Ikosaeder* dargestellt werden. (H. Wiener.)

137a Räumlicher Winkelspiegel angefertigt von **Krüß**, Hamburg, nach Angabe von Prof. **E. Hess**, Univ. Marburg. Nachtrag zu 137.

Ein *vierter* Winkelspiegel, welcher dem Falle

$$A_1 = \frac{180^\circ}{p}, A_2 = A_3 = 90^\circ; \alpha_1 = \frac{180^\circ}{p}, \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ; m = 4p, (p = 2, 3, 4, \dots,$$

entspricht und welcher von einem im Inneren der Ecke befindlichen Punkte $4p - 1$ Bilder erzeugt, welche mit dem Punkte selbst den Eckpunkten eines gleichseitigen

prismatischen $(2 + \overline{p + p})$ -flächigen $2 \cdot 2p$ -Ecks

entsprechen, ist ebenfalls nach den Angaben des Unterzeichneten von Dr. **Krüß** in der Weise hergestellt worden, dass zwei ebene Spiegel um ihre Schnittkante als Axe drehbar construirt und mit einem dritten zu der Axe senkrechten Spiegel verbunden wurden.

a) Für $p = 2$, $A_1 = \alpha_1 = 90^\circ$, $m = 8$ erhält man dann mittelst einer passend eingelegten Figur die holoëdrischen Formen, wie auch die Combinationsgestalten des *rhombischen* und die *pentagonal-hemiedrischen*, wie auch die *holoedrischen* Formen des *regulären* Systems;

b) Für $p = 4$, $A_1 = \alpha_1 = 45^\circ$, $m = 16$ resultiren die Formen des *tetragonalen*,

c) Für $p = 6$, $A_1 = \alpha_1 = 30^\circ$, $m = 24$ diejenigen des *hexagonalen* Systems.

Auch kann dieser Apparat, bei Weglassung des dritten Spiegels, zur

Darstellung solcher Formen, welchen zwei oder mehrere sich *in einer Axe* schneidende Symmetrieebenen zukommen, z. B. der *sphenoidisch-hemiedrischen* Formen des *tetragonalen*, der *rhomboedrisch-hemiedrischen* Formen des *hexagonalen* Systems benutzt werden, während endlich mit Hilfe *eines* (des dritten) Spiegels diejenigen Formen, welche nur *eine* Symmetrieebene besitzen, z. B. die *pyramidal-hemiedrischen* Formen des *tetragonalen* und des *hexagonalen* Systems und die Formen des *monoklinen* Systems dargestellt werden können. (Vgl. die citirte Abhandlung: Neues Jahrb. f. Mineralogie 1889. Bd. 1 S. 54—65.)

(E. Hess.)

137 b Drei Modelle von abwickelbaren Polyedern in Gestalt von Zickzackflächen. Von Prof. **Chr. Wiener** in Karlsruhe, 1880.

Gewöhnliche Polyeder sind selbst geschlossen und besitzen geschlossene Seitenflächen; sie sind nicht abwickelbar. Bildet man die Seitenflächen ungeschlossen, indem man sie aus einem Paare Scheitelwinkel bestehen lässt, so werden die Polyeder abwickelbar. Man kann aber auch abwickelbare Polyeder erhalten, wenn man die Seitenflächen geschlossen, aber das ganze Polyeder ungeschlossen bildet. Dann müssen die Summen der Kantenwinkel an jeder Ecke $= 4R$, also die Ecken nicht convex, daher wenigstens vierflächig sein. Solche Polyeder sind in den Modellen hergestellt durch dreimaliges Hin- und Herbiegen eines Blattes Papier in jedesmal gleich breite Streifen, wobei die Biegungskanten der zweiten und der dritten Streifenschaar sich unter gleichen Winkeln gegen die Kanten der ersten Schaar auf diesen schneiden müssen. Lässt man bei beiderlei abwickelbaren Polyedern die Seitenflächen unendlich klein werden, so erhält man als Grenzgestalten abwickelbare krumme Flächen, und zwar im ersten Falle die gewöhnlichen mit unendlich langen ebenen Flächenelementen, im zweiten Falle die bisher nicht bekannten mit ebenen Elementen, die nach jeder Richtung unendlich klein sind. Diese können mittels der durch eine unendliche Reihe dargestellten Weierstrass'schen Cosinusfunction gebildet werden. Sie sind vorstellbar, aber nicht durch Zeichnung oder Modell darstellbar. (Vergl. Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 2. Bd., S. 28 ff., 1887.)*)

(Chr. Wiener.)

143a Zwei Modelle zur regulären Einteilung des Raumes im Sinne der Nicht-euclidischen Massbestimmung construiert von **Dr. C. Hossfeld** in Eisenach.

Beide Modelle stellen die Schnittlinien von Ebenen und Kugeln dar, die den Raum in eine endliche Anzahl von Tetraedern einteilen. Im ersten Modell schneiden sich sechs Ebenen und vier Kugeln und begrenzen 120 Tetraeder, deren Flächenwinkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ sind; im zweiten Modell schneiden sich neun Ebenen und sieben Kugeln und begrenzen 384 Tetraeder, deren Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ sind. Diese Tetraeder kann

*) Vgl. hier ferner die Note von *H. A. Schwarz* im Cours d'analyse professé pendant le 2. Sem. 1881/82 von Hermite, 2. Aufl. „Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe“.

man als congruent, bezw. symmetrisch bezeichnen, wenn man für den Raum nicht die Euclidische, sondern eine allgemeinere und zwar elliptische Massbestimmung annimmt, und wenn man ferner den gewöhnlichen Begriff der Ebene auf alle Ebenen und Kugeln überträgt, welche die (hier als imaginäre Kugel vorausgesetzte) Fundamentalfläche der Massbestimmung orthogonal schneiden,

Die regulären Einteilungen im dargelegten Sinne lassen sich aus den regulären Körpern im Raume von vier Dimensionen ableiten; es entspricht dann das erste Modell einem Gebilde, das von fünf regulären Tetraedern, das zweite Modell einem solchen, das von acht regulären Hexaedern begrenzt wird. (Hossfeld.)

L. Ebene Curven.

148a Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten. 3 lithogr. Tafeln, construiert 1882 nach Angabe von stud. **H. Wiener** von stud. **Chr. Wolff**. **Math. Institut der techn. Hochschule München.**

Erzeugung aus 2—2 deutigen (im Falle der Curve mit 2 unpaaren Zügen 3—3 deutigen) Punktreihen auf einem Kegelschnitt b . Man nehme den Kegelschnitt r hinzu und einen Punkt Σ , dessen Polare in Bezug auf b diesen Kegelschnitt in den Punkten S und S' schneidet. Legt man nun durch Σ einen Strahl, der „ r “ in den Punkten Q, Q' trifft, nimmt zu einem von diesen die Polare in Bezug auf „ b “, verbindet deren Schnittpunkte R, R' mit b je mit S und S' , so sind die zwei Schnittpunkte dieser Verbindungslinien Punkte der gesuchten C_4 . S und S' sind Doppelpunkte dieser Curve, der Punkt Σ , sowie die Eckpunkte $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ des gemeinsamen Polardreiecks der Kegelschnitte „ b “ und „ r “ sind Schnittpunkte der 4 Paare Doppeltangenten, welche die C_4 besitzt, also gleichberechtigt, so dass sich jede C_4 aus ihnen auf vier (indess nicht alle unter einander verschiedene) Arten construiren lässt.

148b Auflösung von singulären Punkten ebener Curven in die äquivalenten elementaren Singularitäten. 4 lithogr. Tafeln, constr. 1883 nach Prof. **A. Brill** von stud. **Schultheiss**. **Math. Inst. der techn. Hochschule München.**

Zusammenrücken 1) von 1 Rückkehrpunkt und 1 Wendepunkt (Schnabelspitze); 2) von 2 Rückkehrpunkten; 3) von 2 Rückkehrpunkten u. 1 Wendepunkt; 4) von 2 Rückkehrpunkten u. 2 Wendepunkten; 5) von 3 Rückkehrpunkten; 6) von 4 Rückkehrpunkten, mit den dualistischen Uebertragungen.

Man vgl. den Aufsatz von **A. Brill**: „Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven.“ (Math. Annalen, Bd. 16 S. 348 ff.)

Die Tafeln 147, 148a, 148b in lithographischer Ausführung (H. Köhler, München) in einer Mappe vereinigt

M. Algebraische Flächen.

162a Gypsmodell, nebst zugehörigen Photographien einer Fläche 3. Ordnung mit 27 reellen Geraden. Von **Chr. Wiener**, Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe, 1868.

Die Construction geschah mittelst der 27 Geraden. Man wählt unter diesen eine Doppelsechs $a_1 a_2 \dots a_6, b_1 b_2 \dots b_6$; jede a schneidet jede b ausser derjenigen mit gleicher Kennziffer, und umgekehrt. Die anderen 15 Geraden sind $c_{12}, c_{13} \dots c_{56}$; jede c schneidet jede a und b von gleichen Kennziffern; z. B. schneidet die c_{23} die a_2, a_3, b_2, b_3 . Man nimmt nun a_1 willkürlich an, ebenso die Geraden $b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$ derart, dass jede die a_1 schneidet; dadurch sind alle weiteren a , die b_1 und alle c bestimmt. Legt man nun eine Reihe von Ebenen durch a_1 , so schneidet jede die Fläche noch in einem Kegelschnitte, der durch die Schnittpunkte mit 16 der Geraden überschüssig bestimmt ist. Diese Kegelschnitte, welche 5 mal aus 2 Geraden bestehen, wurden als Erzeugende der Fläche betrachtet, und wurden bei dem Scheibenmodelle aus Carton ausgeschnitten und zusammengefügt, während die Geraden a, b, c als Seidenfäden von dreierlei Farbe aufgelegt wurden. Nach dem Scheibenmodell wurde das aus Gyps gebildet.
(Chr. Wiener.)

N. Raumcurven und abwickelbare Flächen; Regelflächen.

173 Die vier Gestalten der Raumcurven 3. Ordnung. Vier Drahtmodelle und vier Fadenmodelle von Privatdocent **H. Wiener, Math. Institut der Universität Halle a. S.**

Vermöge ihrer Lage gegen die unendlich ferne Ebene sind bei der Raumcurve 3. Ordnung viererlei Gestalten zu unterscheiden.

Nr. 1. Die cubische Ellipse. Es ist nur ein (reeller) unendlich ferner Punkt vorhanden mit einer durch das Endliche laufenden Tangente (Asymptote).

Nr. 2. Die cubische Parabel. Die Curve hat drei zusammenfallende unendlich ferne Punkte, d. h. einen Punkt nebst seiner Tangente und Schmiegungeebene im Unendlichen liegen.

Nr. 3. Die cubische hyperbolische Parabel. Von den drei unendlich fernen Punkten fallen zwei zusammen, so dass ein Punkt mit einer durch das Endliche laufenden Tangente (Asymptote) und ein Punkt mit einer unendlich fernen Tangente, aber mit einer durch das Endliche gehenden Schmiegungeebene (Asymptotenebene) vorhanden ist.

Nr. 4. Die cubische Hyperbel. Drei getrennte unendlich ferne Punkte besitzen drei durch das Endliche laufende Tangenten (Asymptoten).

Bei den Drahtmodellen sind die Curven durch Silberdrähte, ihre Asymptoten durch schwarze Drähte dargestellt. In **Nr. 3** gibt es ausser der geraden Asymptote noch eine krumme *Asymptotenlinie*, nämlich eine in der Asymptotenebene liegende Parabel.

Bei den Fadenmodellen sind die abwickelbaren Tangentenflächen dieser Curven zur Anschauung gebracht. Als Begrenzungen dieser geradlinigen Flächen sind ausser Ebenen in **Nr. 1**, wo die Curve auf einem Kreiscylinder liegt, der Schnitt der Fläche mit einem dazu gleichaxigen Cylinder gewählt, in **Nr. 2** und **3**, wo die Curve auf parabolischen Cylindern liegt, sind para-

bolische Cylinder genommen, die mit jenen die Spiegelebene gemein haben. Zu Nr. 4 ist zu bemerken, dass diejenige Curve zur Darstellung gewählt wurde, die auf drei congruenten rechtwinkligen hyperbolischen Cylindern liegt, so dass es eine Gruppe von 6 Bewegungen gibt, die die Curve in sich überführen (Doppelpyramidengruppe). (H. Wiener)

173 a Die verschiedenen Typen der Kegel dritter Ordnung. 7 Fadenmodelle von Privatdocent **H. Wiener**; Math. Inst. der Univ. Halle a. S.

Bei den *rationalen* Curven 3. Ordnung, d. h. denjenigen, die einen Doppelpunkt besitzen, lassen sich dreierlei Gestalten unterscheiden, je nachdem der Doppelpunkt ein *Knotenpunkt*, ein *Rückkehrpunkt* oder ein *isolirter* Punkt ist. Je zwei Curven, die die gleiche Gestalt haben, lassen sich durch eine Collineation ihrer Ebenen auf einander beziehen (Nr. 1, 2, 4.)

Bei den Curven 3. Ordnung vom Geschlecht eins unterscheidet *Möbius* viererlei Gestalten, je nach ihrem Verlauf in den Feldern eines Vierseits, das von der Wendepunktsgerechten und den Tangenten der drei reellen Wendepunkte gebildet wird. Ein Sonderfall ist es, wenn *diese drei Tangenten sich in demselben Punkte treffen* (Nr. 6), geschieht dies nicht, so kann die Curve entweder *zwei Züge* haben (Nr. 3), oder einen *einzigsten Zug*, der sich entweder durch drei von den vier Dreiecken hindurchschlängelt, welche von jenem Vierseit gebildet werden (*Deltaform*, Nr. 5), oder durch die drei Vierecke (*Omegaform*, Nr. 7).

Wie man in den ebenen Schnitten eines Kegels 2. Ordnung die in ihrer Lage zur unendlich fernen Geraden verschiedenen, aber projectiv gleichwertigen Curven 2. Ordnung Ellipse, Parabel, Hyperbel erhält, so kann man auch aus den *Kegeln* 3. Ordnung die durch ihr Verhalten gegen das unendlich Ferne verschiedenst gestalteten Formen von Curven 3. Ordnung gewinnen. Diese Curven an den Modellen wirklich sichtbar zu machen, gelingt durch grelle Beleuchtung des Modells und Beschattung eines Theiles durch eine geradlinig begrenzte Fläche.

Die Nr. 173 u. 173a haben insbesondere den Zweck, ein neues einfaches Verfahren zu zeigen, um *Fadenmodelle herzustellen*. Die einfachste bisher angewandte Methode, die Fäden in Holzrahmen einzuziehen, die mit Laubsäge und Drillbohrer leicht zu bearbeiten sind, hat den Nachtheil, dass sie auf ebene Begrenzungen beschränkt ist, während oft eine *krumme Begrenzung* geboten erscheint, um Brüche in den Linien zu vermeiden, besonders da wo eine krummlinige Begrenzung in den Eigenschaften der dargestellten Fläche begründet ist, wie z. B. die Begrenzung der Schraubenfläche durch Schraubenlinien. Setzt man aber an Stelle der Holzbekleidung Metallstreifen oder Drähte, die sich jeder Form anschmiegen, so wird die Bearbeitung des Materials insbesondere das Bohren der Löcher so schwierig, dass man einen geschickten Mechaniker damit beauftragen muss. Bei Modellen, die zur Vervielfältigung und zur Verbreitung im Handel bestimmt sind, hat das

keinen Nachteil, für Modelle aber, die sich der Einzelne rasch und ohne grosse Kosten zum Studium einer Fläche herstellen will, ist ein anderes Verfahren erwünscht.

Das hier vorgeführte Verfahren bleibt wie das der durchbohrten Drähte auch bei den complicirtesten Begrenzungen anwendbar und bietet keinerlei technische Schwierigkeiten. Das wesentlich neue daran ist, dass zur Herstellung der Grenzlinie, in der die Fäden enden, zwei parallel laufende Drähte verwendet werden, die mit einer wachsartigen Masse ausgestrichen werden, so dass das Bohren der Löcher einfach durch Einstechen mit einer heissen Nadel geschehen kann, also leichter und ebenso genau bewirkt wird, wie das Bohren durch Holz.

Im einzelnen verfähre man so: Um die Paralleldrähte zu biegen, lasse man sich aus hartem Holz die Fläche modelliren, auf der die Grenzlinie verlaufen soll. Es ist dies in unserem Falle ein Kreiscylinder; ebenso leicht kann auch etwa ein parabolischer Cylinder, eine Kugel oder irgend eine andere Fläche angewandt werden. Die Anschaffung eines solchen Holzkörpers kommt wenig in Betracht, da derselbe Körper immer wieder für alle gleichartigen Begrenzungen benützt werden kann. Auf dem Holzkörper wird die zur Begrenzung der Fäden dienende Curve aufgezeichnet, und parallel dazu in einer Entfernung von etwa 1 mm zu beiden Seiten werden die Drähte gebogen. Dies geschieht, wo eine grössere Genauigkeit gewünscht wird, indem man im richtigen Abstand von der vorgezeichneten Linie parallele Linien in das Holz einreisst; bei Cylindern (allgemein abwickelbaren Begrenzungen) ist es vorteilhaft (wie es im vorliegenden Falle auch geschah) sich genaue Pappschablonen herzustellen und diese auf den Holzkörper aufzunageln und längs ihnen die Drähte zu biegen.

Die Enden der gebogenen Drähte werden dann zusammengelötet und hierauf die beiden Paralleldrähte mit dem richtigen Zwischenraum an so viel Stellen aneinander gelötet, dass ein gegenseitiges Schwanken nicht möglich ist. Das so gefertigte Gestell wird dann etwas erwärmt und mit der durch Erwärmen fast flüssig gemachten Masse (wir wählten ein Gemenge von Wachs und Kolophonium) mit einem heissen Messer gut ausgestrichen. Dabei müssen alle noch über die Drähte hervorstehenden Teile der Masse mit dem heissen Messer abgeschmolzen werden. Das Einstechen der Löcher mit der heissen Nadel und das Einziehen der Fäden bietet keinerlei Schwierigkeit.

(H. Wiener.)

173 b Regelflächen zweiter und dritter Ordnung. 5 Fadenmodelle von Privatdocent **H. Wiener, Math. Institut der Univ. Halle a. S.**

Nr. 1. Bewegliches Fadenmodell des Umdrehungshyperboloids mit zwei Scharen von Erzeugenden.

Das Modell besteht aus drei Ringen, in welche Fäden von zweierlei Farben eingezogen sind, und zwar aus einem einzelnen Ring, durch den die Fäden beider Art gehen und ausserdem noch drei einzelne in der Mitte zusammengeknüpfte „Aufhängefäden“, und aus zwei aufeinander passenden Ringen, deren jeder nur einerlei Fäden trägt.

Gebrauch des Modells: Man fasse den Knoten, in dem die 3 Aufhänge, fäden verknüpft sind, und lasse das Ganze aushängen, so dass ein Kreiscylinder entsteht. Dann drehe man es um, bringe an den Aufhängefäden ein Gewichtchen an und umspanne die beiden aufeinander passenden Ringe mit der einen Hand. Dreht man dann mit beiden Händen diese beiden jetzt oberen Ringe in entgegengesetztem Sinne, so stellen sich die Fäden von selbst in die beiden Scharen eines Umdreh-Hyperboloids ein, das sich beim Weiterdrehen dem Umdrehkegel nähert.

Aufstellung des Modells: Man befestige die beiden aufeinander passenden Ringe in dieser gedrehten Lage mit Hilfe der beiden beigegebenen Klammern an einander, drehe das Modell wieder um und stecke durch das Innere die oben gegabelte Stange des beigegebenen Ständers und hänge den Knoten der drei Aufhängefäden in die Gabel des Ständers.

Nr. 2 bis 4. Wenn man um einen Kreiscylinder so eine Sinuslinie aufwickelt, dass sie nach zwei vollen Wellen in sich zurückkehrt, so legt sie sich in eine rationale Raumcurve 4. Ordnung, welche in dem unendlich fernen Cylinderpunkt, der als Spitze des in den Cylinder übergegangenen Kegels zu betrachten ist, einen isolirten Doppelpunkt hat.

In dem Kreiscylinder fallen zwei von den 4 Kegeln zusammen, die durch jede Raumcurve hindurchgehen, welche den Schnitt aller Flächen 2. Ordnung eines Büschels bildet. Die zwei fehlenden Kegel berühren sich, wie alle anderen Flächen des Büschels, in dem (unendlich fernen) isolirten Doppelpunkt der Curve, es sind *zwei congruente parabolische Cylinder*. (*Nr. 2.*)

Unter den Flächen des Büschels findet sich auch ein rechtwinkliges Paraboloid. (*Nr. 3.*)

Die Raumcurve 4. Ordnung mit Doppelpunkt ist als Übergang einer solchen Curve 1. Art und 2. Art aufzufassen, und muss deshalb auch als teilweiser Schnitt einer Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung construirt werden können, nämlich mit irgend einer Fläche des Büschels. Die Fläche 3. O. ist in unserem Falle das durch seine geometrischen wie kinematischen Eigenschaften gleich wichtige *Cylindroid*. (*Nr. 4.*)

Nr. 5 zeigt die gegenseitige Lage eines *rechtwinkligen Paraboloids*, das als Ort der Punkte zu betrachten ist, die von zwei gegebenen Geraden gleichweit abstehen und des *Cylindroids*, welches alle diejenigen Geradenpaare enthält, zu denen *dasselbe* rechtwinklige Paraboloid gehört. Dabei bildet jede Gerade des Cylindroids ein Paar zusammen mit derjenigen Geraden, in welche die erste an jeder der auf einander senkrecht stehenden Mittel erzeugenden des Cylindroids gespiegelt wird.

(H. Wiener.)

177a. Gypsmodelle, spezielle Durchdringungen von Flächen zweiter Ordnung. Prof. B. v. Tötössy und Prof. M. Balog, Budapest.

- a) Kugel und Rotationskegel; Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit Spitze.
- b) Dasselbe, mit Weglassung des Kegels.
- c) Kugel und Rotationcylinder; Raumcurve vierter Ordnung erster Art mit Doppelpunkt.
- d) Kugel.

NB. Siehe die Beschreibung des Apparates sub Nr. 177 b. (Tötössy.)

177b. Zwei photographische Ansichten eines Apparates zur Herstellung von Rotationsflächen aus Gyps. Von Prof. **B. v. Tötössy**, an der technischen Hochschule und Prof. **Moritz Balog**, an der Realschule Budapest.

Ein vertical gelagerter Zapfen trägt an seinem oberen Ende eine Kurbel, an seinem unteren Ende einen zuerst horizontal verlaufenden, dann vertical nach abwärts gebogenen starken Arm, an welchem die, den Meridian darstellende Schablone mittelst Flügelschrauben befestigt wird. — Das Zapfenlager hat drei horizontale, ein Γ bildende starke Arme. Dieselben rücken mit ihren Enden auf drei Säulen, die ihrerseits auf eine quadratische Platte aufgeschraubt sind. Die Platte ist an mehreren Stellen durchbohrt, um von unten kleine Cylinderstifte einschrauben zu können, die dazu dienen, während der Arbeit ein Gleiten der weichen Gipsmasse zu verhindern. Die Kugel zusammen mit dem Postamente, der Kegel und der Cylinder in den Modellen sub Nr. **177a)**—d) sind mit dem Apparat hergestellt worden, speciell Nr. **177a)** ist das Originalmodell, wie es in einem Stück, direct aus dem Apparat hervorgegangen ist, ohne auch nur die geringste Correctur anzuwenden.

Der Apparat wurde in der mechanischen Werkstätte, die beiden Aufnahmen in dem photographischen Atelier des königl. ungarischen Josephs-Polytechnikums zu Budapest hergestellt. (Tötössy.)

185a. Fadenmodell einer speziellen Regelfläche vierter Ordnung. Von Béla v. **Tötössy**, Prof. techn. Hochschule Budapest.

Setzt man in der Gleichung $U^2 - p^3q = 0$ der allgemeinen Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt

$$U \equiv x_1 x_3 - x_2 x_4, \quad p \equiv x_4, \quad q \equiv x_1,$$

so erhält man die Gleichung

$$R \equiv (x_1 x_3 - x_2 x_4)^2 - x_1 x_4^3 = 0$$

der durch das Modell dargestellten Regelfläche. — Der Cuspidalkegelschnitt U_p und der Kegelschnitt U_q , längs welchem die Ebene q die Fläche berührt, zerfallen in die Geradenpaare $d r$, respective $d s$. — d ist Selbstberührungsgerade, r Rückkehrerzeugende und s ein developpables Element der Fläche mit der Ebene $d s$ als Berührungsebene.

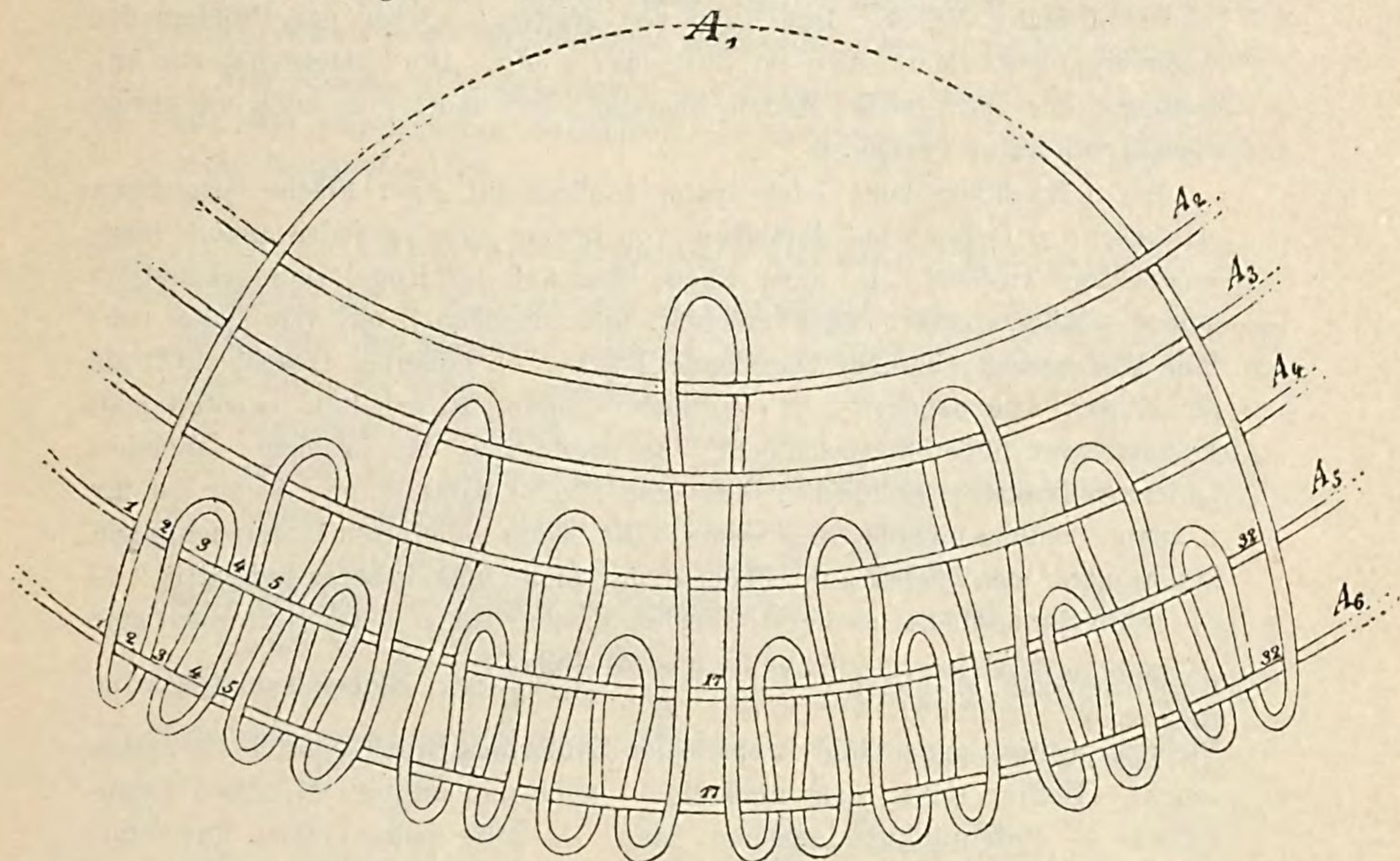
Bezieht man die Punktepaare einer hyperbolischen Involution eines Kegelschnittes k und die Punkte einer Geraden d , welche durch den Pol A_2 der Involution hindurchgeht und nicht in der Ebene von k liegt, in solcher Weise projectivisch aufeinander, dass dem einen Doppelpunkt A_1 der Involution der Pol derselben als Punkt von d entspricht, so ist das Erzeugniss dieser Projectivität die dargestellte Regelfläche. — Die Gerade d wird Selbstberührungsgerade, die Gerade $A_1 A_2$ wird Rückkehrerzeugende und die Verbindungsline des zweiten Doppelpunktes A_4 der Involution auf k mit seinem Entsprechenden A_3 auf d wird das developpable Element.

Das ausgestellte Modell wurde vom Aussteller im Winter 1882/83 in Budapest angefertigt und ist Eigenthum der mathematischen Sammlung des königl. ungarischen Josephs-Polytechnikums. Ein genau gleiches Modell wurde vom Aussteller im März 1882 für die mathematische Sammlung des Züricher Polytechnikums angefertigt. (Tötössy.)

N. Analysis situs.

189a. Fünf Holzrahmen mit Eisenstäben und Seidenschnüren zum Studium der Verkettungen. Von Privatdocent H. Brunn, Univ. München.

Die ausziehbaren Eisenstäbe in den Holzrahmen sind in Gedanken zu vervollständigen zu in sich zurücklaufenden Ringen und repräsentiren die



Ringe A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 in den Figuren 6, 7, 8, 9 meines Aufsatzes über Verkettung. Die Seidenschnur ist entsprechend dem Verlauf des Ringes A_1 in diesen Figuren in die Eisenstäbe zu verschlingen. Der Holzrahmen dient zu gleicher Zeit dazu, die Eisenstäbe zu fassen und deren mangelnde Teile zu ersetzen. Um gleich das complicirteste Beispiel der Anwendung der Modelle zu wählen, so schlinge man die Seidenschnur nach Massgabe von Figur 9, welche auf der vor. Seite reproduzirt ist*), durch die 5 Stäbe und zwar bei allen 5 Rahmen. Die Schnur ist dann ohne Herausziehen eines Stabes nicht von dem Rahmen zu trennen. Nun ziehe man beim ersten Rahmen die oberste, beim zweiten die zweite, beim dritten die dritte etc., beim letzten Rahmen die unterste Eisenstange heraus: dann ist bei allen fünf Rahmen die Schnur mit Leichtigkeit ganz frei zu machen. Man könnte die 5 Experimente successive an ein und demselben Rahmen vornehmen. Die Verfünffachung des Rahmens ist aber vorgenommen, um die Lösbarkeit der Schnur bei Herausziehen eines beliebigen der Stäbe möglichst schnell und gleichzeitig demonstrieren zu können, ohne durch das etwas langwierige Wiederhineinschlingen der Schnur aufgehalten zu sein.

(Abgedr. aus dem Katalog der Math. Ausstellung; Deutsche Universitäts-Ausstellung in Chicago) (Brunn.)

*) Abgesehen von einem Fehler, den diese Figur der Abh. enthält; die oberste Überkreuzung rechts ist dort in die entgegengesetzte zu verwandeln.

189b. Sieben Modelle mit der Darstellung von „Nachbargebieten“ auf Flächen vom Geschlechte 1 und 2. Von Privatdozent **H. Brunn**, Univ. München.

Die wichtigsten Förderungen in der Lehre von den Nachbargebieten („spatia confinia“) auf Flächen verschiedenen Geschlechtes verdankt man den beiden Aufsätzen von *Heawood*: „Map-Colour-Theorem“ (Quarterly Journ. of Math. Nr. 96, 1890) und von *Heffter*: „Über das Problem der Nachbargebiete“ (Math. Ann. Bd. 38 S. 477 u. ff.). Der letztere hat zur Anfertigung der vorliegenden Modelle angeregt; dort findet man auch die übrige einschl. Literatur angegeben.

Als n Nachbargebiete oder spatia confinia auf einer Fläche bezeichnen wir solche n Gebiete auf derselben, von denen jedes an jedes andere längs einer Linie anstösst. In einer Ebene und auf der Kugel sind bekanntlich nur 4 solcher spatia confinia möglich, und umgekehrt, um vier spatia confinia herzustellen, braucht man keine Fläche von höherem Geschlecht*) als die Ebene. Um dagegen n (> 4) spatia confinia zu erhalten, benötigt man Flächen von höherem Geschlecht. Es ergibt sich das Problem: Welches ist das niedrigste Geschlecht, das eine Fläche haben kann, wenn auf ihr n spatia confinia möglich sein sollen? Die bisher gelieferten Untersuchungen beschränken sich hiebei auf „Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix.“**)

Heffter a. a. O. hat nachgewiesen, dass sicher für $n \leq 12$ diese niedrigste Geschlechtzahl p_n gleich $\frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$ ist. Hiebei bedeutet α die

kleinste positive ganze Zahl, welche den Zähler des Bruches durch 12 teilbar macht. Heffter zeigt, dass man die — auch bei unseren Modellen eingehaltene — Beschränkung machen kann, es solle jedes Gebiet nur längs *einer* Linie an jedes andere anstossen, dass ferner die Gebiete einfach zusammenhängende Flächenteile sein können und gibt für jedes p bis p_{12} eine Einteilung wirklich an.

Der Unterzeichnete hat sich die Aufgabe gestellt, die Einteilung eines Kreisringes in 5, 6 und 7 Nachbargebiete am körperlichen Modell auszuführen und dabei die Anordnung der Gebiete zu einer möglichst regelmässigen und übersichtlichen zu gestalten. Die in Heffter's Aufsatz gezeichneten oder in Ziffern dargestellten Schemata, so grosse Vorzüge sie haben, geben doch nicht ohne weiteres ein Bild, wie nun die spatia confinia auf der geschlossenen Fläche sitzen. Es sind ferner durch die Modelle alle wesentlich verschiedenen Fälle erschöpft, die oben angeführten Beschränkungen vorausgesetzt. Als wesentlich gleiche Anordnungen bezeichnen wir hier solche, für welche die den Zahlen $e_3, e_4, e_5, \dots, e_n$ beizulegenden Wertreihen gleich sind, unter e_i die Anzahl der Punkte („Ecken“) auf der Fläche verstanden, in denen i verschiedene spatia confinia zusammenstossen.*)

*) Definition s. bei Heffter a. a. O. Seite 480.

**) S. W. Dyck, Beiträge z. Anal. sit. Math. Ann. Bd. 32, p. 437 und 462.

*) Zwei solche „wesentlich gleiche“ Anordnungen, auf ein und derselben Fläche ausgeführt, brauchen noch nicht ineinander überführbar zu sein durch blosse Verschiebung und Zerrung längs der Fläche. Man denke an zwei symmetrisch, wie Bild und Spiegelbild sich verhaltende Anordnungen.

Diese Zahlen befriedigen in unserem Falle, wenn k die Anzahl der Grenzlinien („Kanten“), n die der Gebiete auf der geteilten Ringfläche bezeichnet, die Gleichungen:

$$e_3 + e_4 + \dots + e_n = k - n; 3e_3 + 4e_4 + \dots + n e_n = 2k$$

Die durch die gerade Rotationsaxe eines Kreisringes gelegten Ebenen schneiden die Fläche nach Kreisen, deren Mittelpunkte auf einem Kreise liegen, welchen wir im Folgenden als *Rundaxe* des Ringes bezeichnen wollen.

Die Nummern 1—6 bestehen aus Kreisingen, Modell Nr. 7 eine Fläche mit zwei Durchgängen, bezeichnet die Richtung, nach welcher die Modellreihe fortzusetzen ist.

Fünf Nachbargebiete auf einem Kreising.

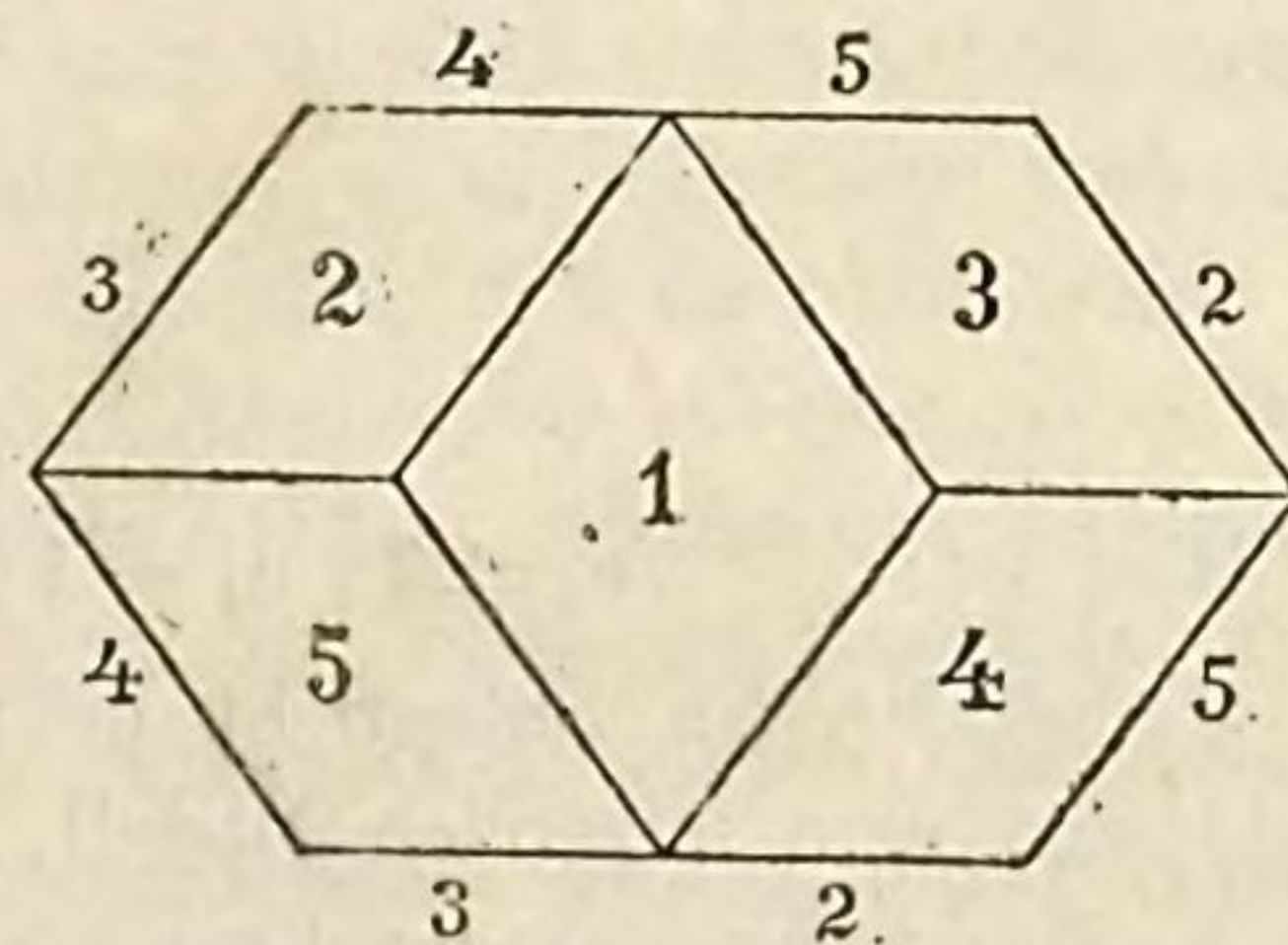
Modell Nr. 1: Eine in sich zurückkehrende Schraubenlinie windet sich einmal um die Rundaxe, während sie zweimal die gerade Axe umkreist. Diese Linie als Schnitt gedacht, macht aus der Fläche ein zweirandiges in sich zurücklaufendes Band. Das Band wird durch eine zweite Schraubenlinie, welche sich zweimal um die Rundaxe windet, während sie die gerade Axe einmal umkreist, in die 5 spatia confinia zerlegt. Es ist

$$e_3 = 0; e_4 = 5; e_5 = 0 \text{ (reguläre Einteilung.)}$$

Siehe übrigens bei Heffter das Zahlenschema für $n = 5$, pg. 490 u. Fig. 2.

Modell Nr. 2: Statt der Beschreibung dieser bei Heffter nicht behandelten und schwerer in Worte zu kleidenden Anordnung folge hier ihr Zahlenschema und das Netz der Flächeneinteilung (Sinn wie bei Heffter):

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
3	1	5	2	4
4	1	3	5	2
5	1	3	4	2



Hier ist: $e_3 = 2; e_4 = 1; e_5 = 2$.

Andere wesentlich verschiedene Anordnungen von 5 Nachbargebieten auf einem Ringe gibt es nicht, denn die Configuration:

$$e_3 = 1; e_4 = 3; e_5 = 1;$$

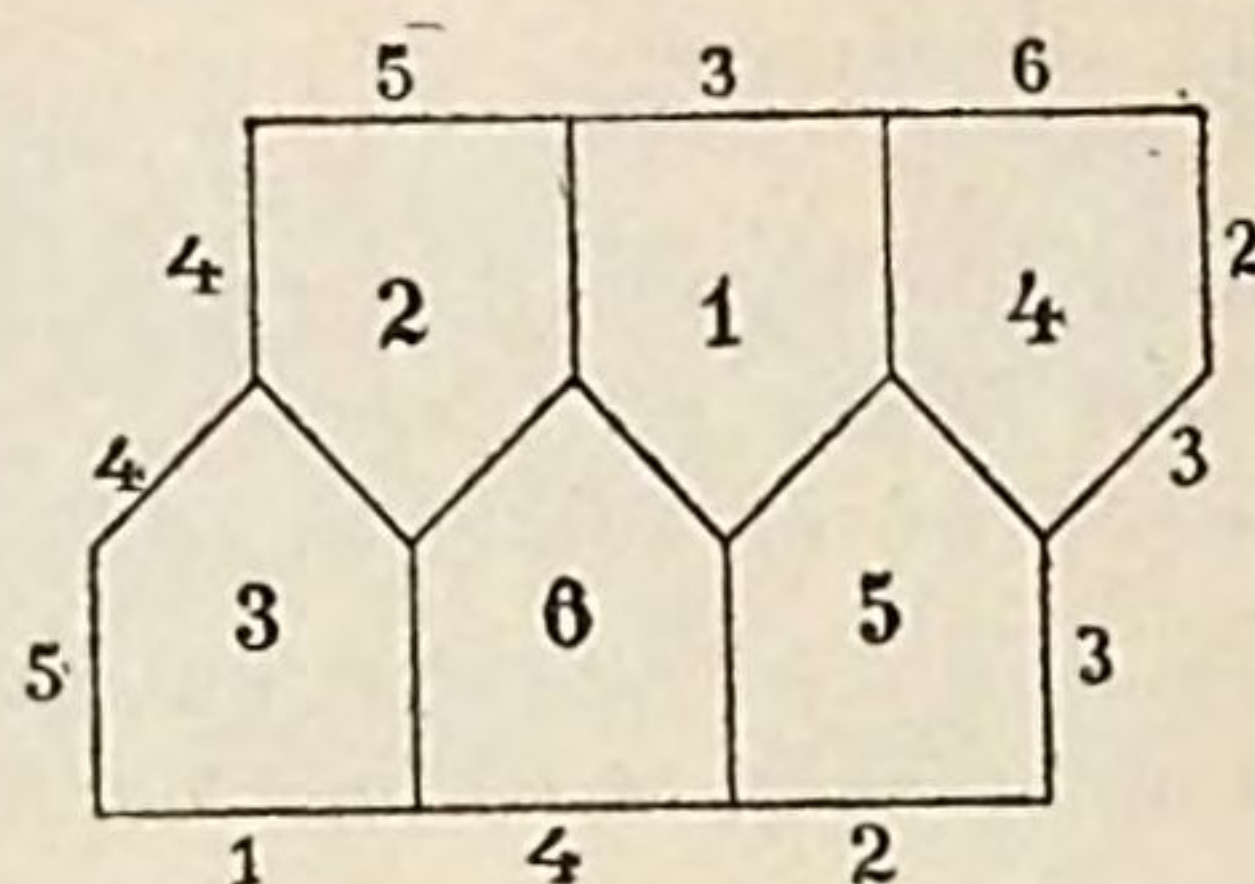
welche den beiden Gleichungen noch Genüge leisten würde, ist unausführbar, wenn jedes Gebiet an jedes andere nur längs *einer* Linie anstossen soll.

Sechs Nachbargebiete auf einem Kreising.

Modell Nr. 3: Einer der erzeugenden Kreise K des Ringes werde in 3 gleiche Teile geteilt. Von den Teilpunkten aus winden sich drei Schraubenlinien mit einer halben Drehung um die Rundaxe, während sie die gerade Axe einmal umkreisen, so dass sie zurückkommend zu K gerade mitten zwischen den 3 ersten Teilpunkten auftreten. Die entstehenden drei bandartigen Gebiete werden durch den K diametral gegenüberliegenden Erzeugungskreis K' in die 6 spatia confinia zerlegt.

Auch für diese Einteilung sei Schema und Netz gegeben, weil sie sich bei Heffter nicht findet.

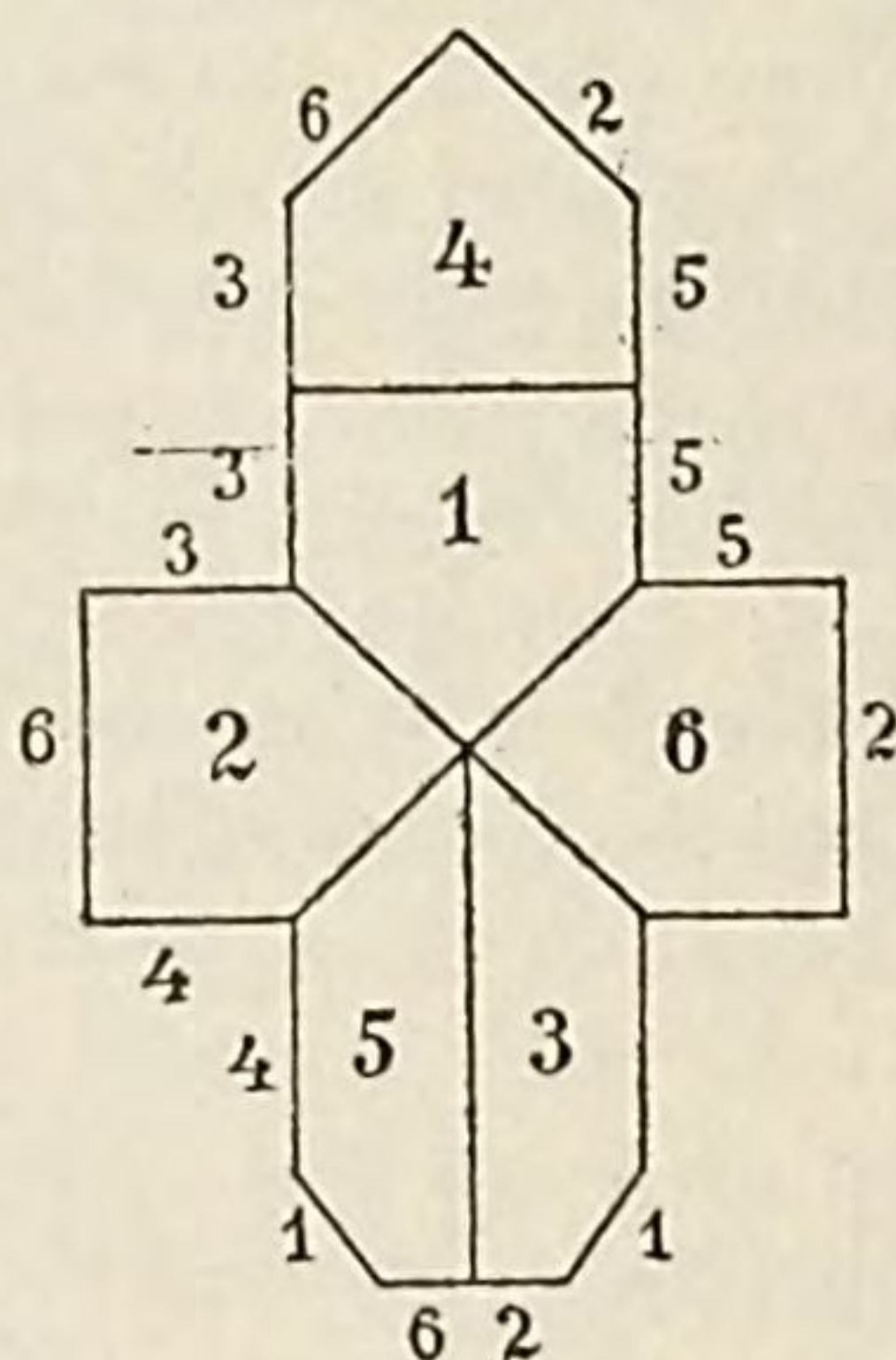
1	2	3	4	5	6
2	1	6	3	4	5
3	1	5	4	2	6
4	1	6	2	3	5
5	1	4	3	2	6
6	1	5	4	3	2



Hier ist: $e_3 = 6; e_4 = 3; e_5 = 0.$

Modell Nr. 4: Entsteht aus Modell Nr. 2, wenn an Stelle eines der Punkte, wo alle fünf Flächen zusammenstossen, ein Fünfeck eingefügt wird. Die Anfangsbemerkung für Modell Nr. 2 gilt auch hier.

1	2	3	4	5	6
2	1	5	4	6	3
3	1	2	5	6	4
4	1	3	6	2	5
5	1	4	2	3	6
6	1	5	2	4	3



Hier ist: $e_3 = 7; e_4 = 1; e_5 = 1; e_6 = 0.$

Modell Nr. 5: Entspricht dem Schema für $n=6$ bei Heffter und entsteht aus dem folgenden Modell, indem man eine der sieben Flächen auf einen Punkt zusammenschrumpfen lässt, so dass auch sein Netz durch Schrumpfung der mittelsten Fläche aus Figur 3 bei Heffter in symmetrischer Form zu erhalten ist. Die Anordnung der Gebiete ist symmetrisch zu dem Ringdurchmesser, welcher durch den sechsfachen Eckpunkt läuft. Hier ist

$$e_3 = 8; e_4 = 0; e_5 = 0; e_6 = 1.$$

Sieben Nachbargebiete auf einem Kreisring.

Modell Nr. 6: Entspricht dem Schema für $n=7$ und der Figur 3 bei Heffter. Eine Schraubenlinie windet sich einmal um die Rundaxe, während sie die gerade Axe dreimal umkreist. Es entsteht dadurch auf der Fläche ein in sich zurücklaufendes Band, das in 7 Teile geteilt ist, welche von der Axe aus in gleicher Breite erscheinen.

$$e_3 = 14; e_4 = 0; e_5 = 0; e_6 = 0; e_7 = 0.$$

Einzig mögliche Anordnung. Mehr als 7 spatia confinia sind auf dem Kreisringe nicht möglich.

Acht Nachbargebiete auf einer Fläche vom Geschlecht zwei.

Modell Nr. 7: Entspricht dem Schema für $n=8$ bei Heffter. Die Zahlen e_i müssen für eine Fläche vom Geschlecht zwei folgende Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} e_3 + e_4 + \dots + e_n &= k - n - 2 \\ 3e_3 + 4e_4 + \dots + ne_n &= 2k \end{aligned}$$

Bei unserem Modell ist:

$$e_3 = 16; e_4 = 2; e_5 = e_6 = e_7 = e_8 = 0.$$

Eine unter den gegebenen Voraussetzungen von der vorgeführten Einteilung wesentlich verschiedene, welche höchstens noch die Form

$$e_3 = 17; e_4 = 0; e_5 = 1; e_6 = e_7 = e_8 = 0$$

haben könnte, gibt es nicht und mehr als 8 spatia confinia sind auf einer Fläche vom Geschlechte zwei nicht möglich.

(Abgedruckt aus dem Katalog der Math. Ausstellung; Deutsche Universitäts-Ausstellung in Chicago.)

Nachtrag.

Im Vorstehenden sind für Nachbargebiete auf Flächen vom Geschlecht eins die Gleichungen:

$$e_3 + e_4 + \dots + e_n = k - n; \quad 3e_3 + 4e_4 + \dots + ne_n = 2k$$

für solche auf Flächen vom Geschlecht zwei die Gleichungen:

$$e_3 + e_4 + \dots + e_n = k - n - 2 \quad 3e_3 + 4e_4 + \dots + ne_n = 2k$$

angegeben. Indem in diesen Gleichungen dem Index von e höchstens die Grösse n erteilt ist, werden solche Einteilungen ausgeschlossen, bei welchen in einer Flächenecke zwei oder mehrere Ecken des nämlichen Einteilungsgebietes zusammenstossen. Lässt man dagegen Gebietseinteilungen zu, bei denen in einer Flächenecke ein Gebiet auch an sich selbst anstossen darf — und es ist eigentlich kein Grund vorhanden, dies auszuschliessen — so muss man dem Index von e in obigen Gleichungen beliebig hohe Werte annehmen gestatten. Um dann, unsrem Vorsatz gemäss die möglichen wesentlich verschiedenen Flächeninteilungen zu erschöpfen, müssen den beschriebenen Modellen noch drei weitere hinzugefügt werden, alle auf Einteilung eines Ringes in 5 Nachbargebiete bezüglich. Für 6 und 7 Nachbargebiete auf einem Ringe sowie für beliebige Nachbargebietseinteilungen auf Flächen höheren Geschlechtes wird durch das Fallenlassen der Beschränkung keine Veränderung in der Anzahl der Möglichkeiten hervorgerufen, so lange wenigstens die bei Heffter mit (B) bezeichnete Formel

$$p_n = \frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$$

gilt, aus welcher folgt, dass höchstens achtfache Eckpunkte auftreten können.

Wir lassen nun eine Beschreibung der neu hinzukommenden Modelle folgen:

Modell Nr. 8. Hier ist:

$$n = 5; e_3 = 2; e_4 = 2; e_5 = 1;$$

Die Einteilung wird bewirkt durch eine geschlossene Linie, welche durch den sechsfachen Eckpunkt geht, die gerade Axe einmal und die Rundaxe ebenfalls einmal umkreist, ferner durch eine geschlossene Linie, welche zweimal durch den sechsfachen Eckpunkt geht und die gerade sowohl wie die Rundaxe zweimal umkreist, schliesslich durch ein Stück des

dem sechsfachen Eckpunkt diametral gegenüberliegenden erzeugenden Kreises K des Ringes. Die Einteilung ist symmetrisch in bezug auf den Ringdurchmesser, welcher durch den sechsfachen Eckpunkt läuft. Netz und Schema sind:

1	2	3	4	5
2	1	3	5	4
3	1	4	2	5
4	1	3	2	5
5	1	4	2	3

Modell Nr. 9. Hier ist:

$$n = 5; e_3 = 3; e_4 = 1; e_7 = 1.$$

Die Einteilung wird vermittelt durch drei geschlossene Curven, welche je einmal durch den siebenfachen Eckpunkt gehen. Die erste umkreist die gerade und die Rundaxe je einmal. Die zweite umkreist die gerade Axe einmal, die Rundaxe keinmal; die dritte umkreist die gerade Axe einmal, die Rundaxe zweimal. Ausserdem ist, um die Einteilung zu vollenden, noch ein vom siebenfachen Eckpunkt ausgehendes Stück desjenigen erzeugenden Kreises K verwendet, welcher einen von der dritten geschlossenen Curve frei bleibenden Winkelraum der beiden ersten halbirt. Statt durch den Scheitelwinkelraum zum siebenfachen Eckpunkt zurückzuführen, gabelt sich diese Curve in zwei Aeste, so dass in dem Scheitelwinkelraum ein Viereck entsteht, von dem das fehlende Kreisstück eine Diagonale bilden würde. Die geschlossenen drei Linien sind symmetrisch in bezug auf den durch den siebenfachen Eckpunkt laufenden Ringdurchmesser, der Kreis mit der Gabelung in bezug auf eine durch diesen Durchmesser und die gerade Axe gehende Ebene.

Netz und Schema sind:

1	2	3	4	5
2	1	5	3	4
3	1	5	2	4
4	1	3	2	5
5	1	4	3	2

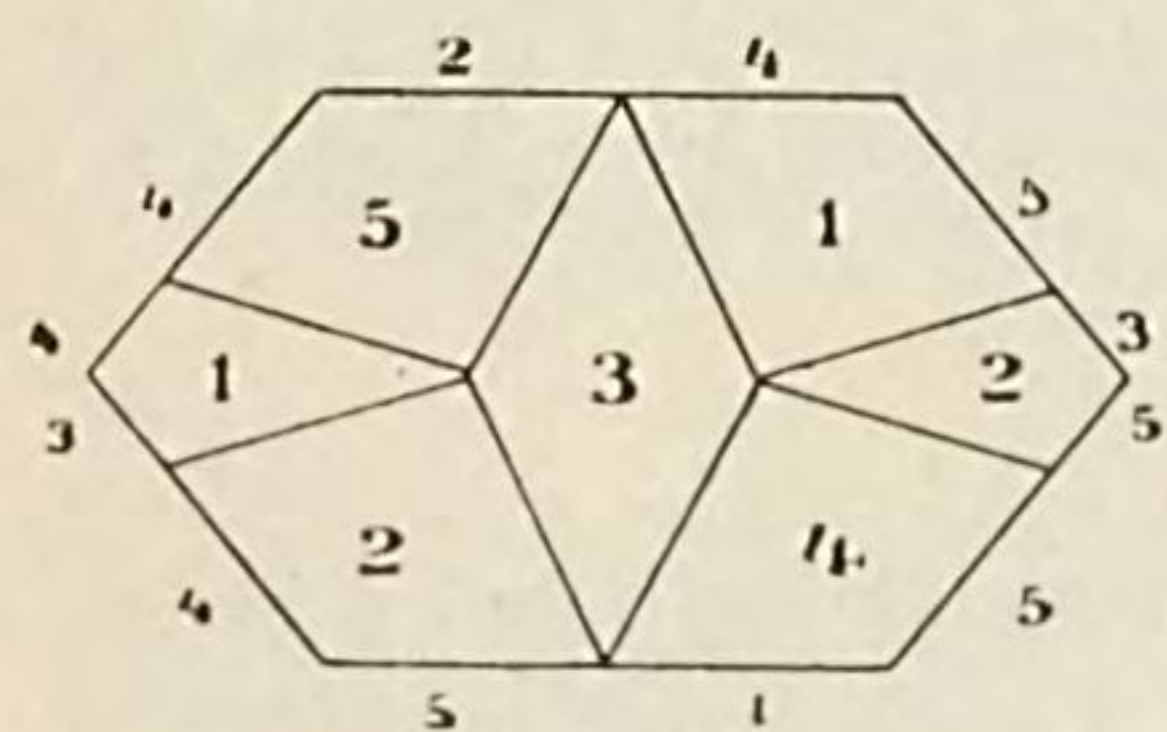


Fig. 8.

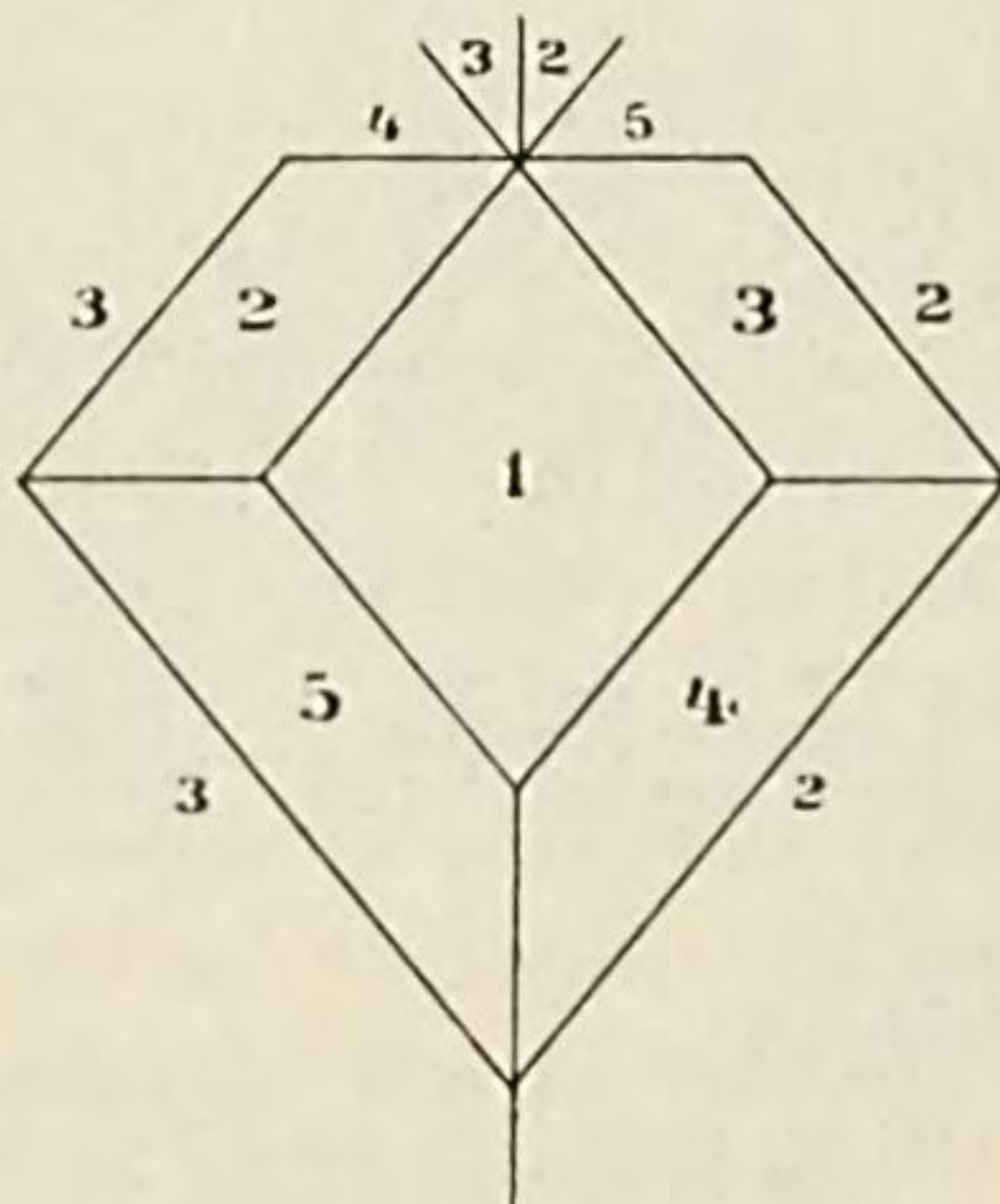


Fig. 9.

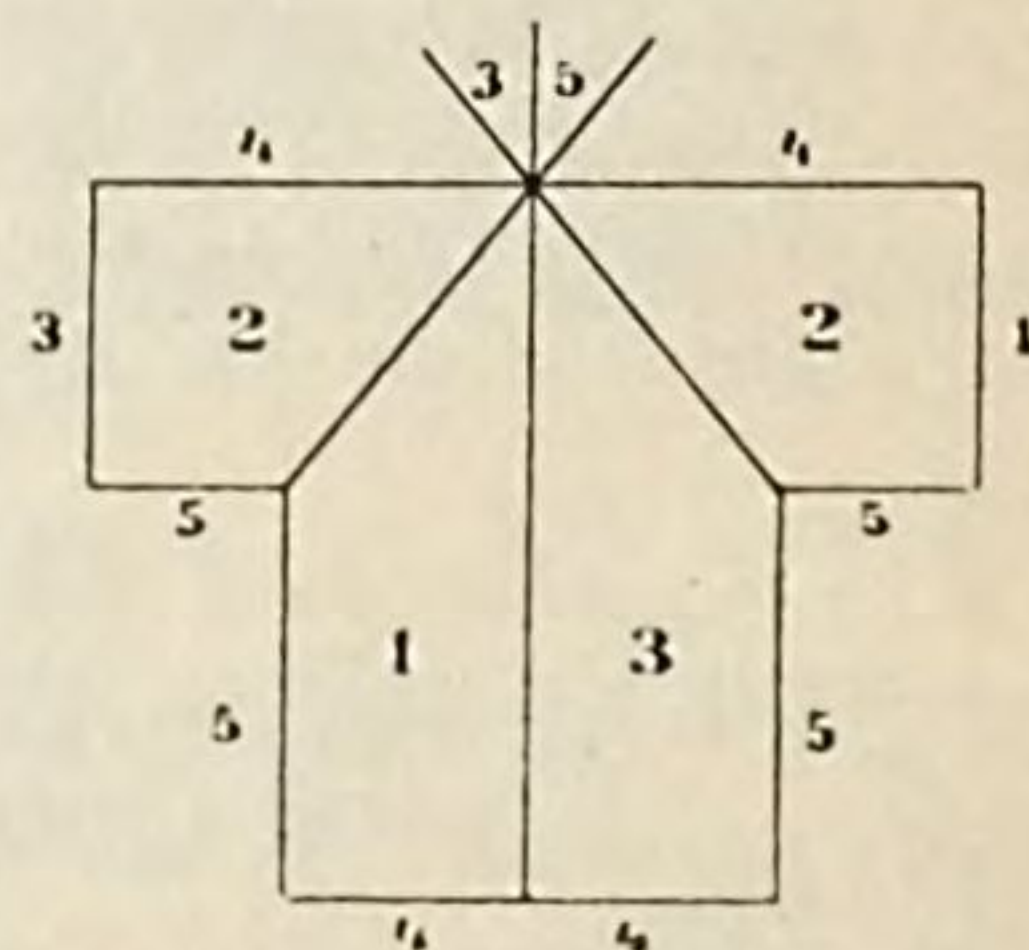


Fig. 10.

Modell Nr. 10 und Nr. 11.

Hier ist

$$n = 5; e_3 = 4; e_8 = 1.$$

Die beiden Modelle sind nicht wesentlich von einander unterschieden, nur dass der achtfache Eckpunkt in beiden Fällen etwas anders constituirt ist.

Bei Modell Nr. 10 wird die Einteilung bewirkt durch den erzeugenden Kreis K, welcher den achtfachen Eckpunkt enthält, eine doppelt durch diesen Eckpunkt gehende Curve, welche die gerade Axe einmal, die Rundaxe zweimal symmetrisch zu der Ebene von K und dem Ringdurchmesser des achtfachen Eckpunktes umkreist, und eine Curve, welche ebenfalls durch jenen Eckpunkt gehend die gerade Axe dreimal, die Rundaxe einmal umkreist. Von dieser letzten Curve, welche die vorhergehende in vier Punkten schneiden würde, kommen nur zwei Stücke zur Verwendung, welche beide ausserhalb des nämlichen von der zweiten Curve begrenzten Flächenstückes liegen. Diese dritte Curve ist ebenfalls symmetrisch zu dem Ringdurchmesser durch den achtfachen Eckpunkt.

Netz und Schema sind:

1	2 3 4 5
2	1 5 3 4
3	1 2 5 4
4	1 3 2 5
5	1 4 3 2

Modell Nr. 11 entsteht aus dem vorigen, wenn sich das Gebiet 1 vom achtfachen Eckpunkt zurückzieht, und dafür das Gebiet 5 mit einer weitem Polygonecke an jenen Punkt herantritt. Bei der Einteilung fungiren die beiden beim vorigen Modell zuerst genannten Curven ebenfalls wieder, an Stelle der dritten treten 3 Kreise um die gerade Axe, ein Aequatorialkreis und zwei dazu parallele, welche nicht ganz vollständig benötigt werden. Wir setzen nur das Schema her:

1	2 3 4 5
2	1 5 4 3
3	1 2 5 4
4	1 3 2 5
5	1 4 3 2

(Brunn.)

189 c. Carton-Modelle von symmetrischen Riemann'schen Flächen nach Angabe von Prof. Dyck, technische Hochschule München.

Herr Klein hat in seiner Schrift über „Riemanns Theorie der algebraischen Functionen“ und in zwei Noten „Ueber die conforme Abbildung von Flächen“ und „Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich“ Annalen XIX. p. 159 und 565, auf die Classification der symmetrischen Riemann'schen Flächen nach ihren „Symmetrielinien“ hingewiesen und gezeigt, dass orthosymmetrische Flächen vom „Geschlechte p“ stets

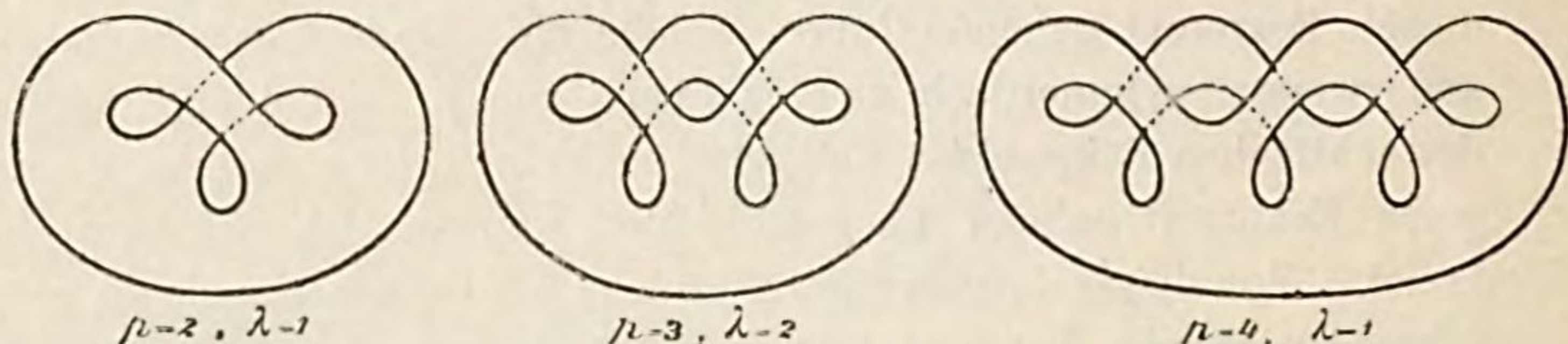
$$\lambda = 1, 3, 5 \dots p + 1$$

Symmetrielinien, wenn p gerade, und

$$\lambda = 2, 4, 6 \dots p + 1$$

Symmetrielinien, wenn p ungerade, besitzen. Herr Weichold hat in seiner Dissertation „Ueber symmetrische Riemann'sche Flächen“ (Schlömilch's Zeitschr. Bd. 28) typische Gestalten für diese Flächen aufgestellt, in denen jene Symmetrielinien für eine Orthogonalprojection als

Umrisse auftreten, aber so, dass ausser diesen die Fläche noch weitere (zu einander symmetrisch gelegene) Umrisscurven besitzt. Es liegt die Frage nahe, ob es nicht gelingt, derartige typische Gestalten aufzustellen, für welche jene Symmetrielinien als der alleinige Umriss auftreten, so also, dass alle jene Flächen wieder durch doppelte Ueberdeckung eines



mehrfach zusammenhängenden ebenen Flächenstücks vorgestellt werden können. Dies gelingt in der That auf die einfachste Weise. Die Figuren zeigen die extremsten Fälle, in denen also die Anzahl der Umrisscurven $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = 2$ ist, für Flächen vom Geschlechte 2, 3, 4, aus welchen sich sofort alle übrigen analogen Darstellungen ergeben. Fig. 1 ist dabei die schon von *Riemann* in der Theorie der *Abel'schen* Functionen (Werke pag. 89) angewandte Figur. (Dyck.)

189 d. Mosaikanordnungen von 24 gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecken von P. A. Mac Mahon, F. R. S. London.

Mosaikanordnungen gebildet aus den 24 gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreiecken, welche man erhält, wenn man vier Farben auf alle Weisen je längs der drei Seiten verteilt. (Zwei Tafeln und ein Satz zugehöriger Steine.) (Mac Mahon.)

O. Modelle zur Liniengeometrie.

199 a. Modell von Seidenfäden in Drahtgestell über das Cylindroid oder das Plücker'sche Conoid. Construiert und ausgeführt in dem **Seminar für darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Karlsruhe** unter Leitung des Prof. **Chr. Wiener** von dem Studirenden und Assistenten **Tesch**, 1890.

Diese Fläche ist eine windschiefe Fläche 3. Grades, deren 3 Leitlinien sind: 1. Die Axe eines Umdrehungscylinders, 2. die unendlich ferne Gerade einer auf dieser Axe senkrechten Ebene, 3. eine Curve auf diesem Cylinder, welche durch die Abwicklung des Cylinders zu den 2 Gängen einer Cosinuslinie wird, deren (durch die Wendepunkte gehende) Axe senkrecht auf den Erzeugenden des Cylinders steht. Diese krumme Leitlinie ist durch einen Draht dargestellt und jede Erzeugende durch einen Faden, welcher 2 gegenüberstehende Punkte der krummen Leitlinie verbindet und die Axe des Cylinders senkrecht schneidet. Die Axe des Cylinders ist eine Doppellinie der Fläche. Die krumme Leitlinie ist eine Curve 4. Ordnung, durch welche ausser dem doppelt zu zählenden Umdrehungscylinder 2 congruente parabolische Cylinder gehen, deren Erzeugende mit den aufeinander senkrechten (am weitesten von einander entfernten) Scheitelerzeugenden der Fläche parallel sind. (Chr. Wiener.)

P. Modelle und Zeichnungen zur Krümmungstheorie.

Geodätische Linien.

214a. Eine Rotationsfläche 4. Grades, deren geodätische Linien algebraisch sind. Ausgeführt von Assistent **G. Diem** im **Math. Institut der technischen Hochschule München.**

Jules Tannery discutirt in den Melanges des „Bulletin des Sciences Mathématiques“ 1892 I. Teil, p. 190 die Rotationsfläche 4. Grades:

$16 a^2 (x^2 + y^2) = z^2 (2 a^2 - z^2)$, die er aus der Note XV von Darboux über geodätische Linien in dem Traité de Mécanique von Despeyroux ableitet.

Die Fläche liegt symmetrisch gegen die XY-Ebene, der eine Teil derselben ist durch das birnförmige Modell dargestellt. Die geodätischen Linien auf der Fläche sind geschlossen, algebraisch und von gleicher Länge. Sie haben die Form einer 8. Im Grenzfall gehen sie in den Meridian, resp. grössten Parallelkreis über, dessen Umfang also halb so gross ist als der Meridian der dargestellten Fläche.

Die Fläche hat in Parameterform die Gleichung:

$$x = \frac{a}{4} \cos u \cos \vartheta \quad y = \frac{a}{4} \cos u \sin \vartheta \quad z = a \left(1 - \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{u}{2} \right)$$

Für die geodätischen Linien besteht folgende Beziehung zwischen ϑ und u .

$$\sin (\vartheta - \alpha) = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 u}}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{2 \sin u - \sin^2 \alpha (1 + \sin u)}{\cos u (1 - \sin u)},$$

wobei α der Winkel ist, unter welchem die geodätische Linie den grössten Parallelkreis schneidet.

Legt man einen Papierstreifen von nicht zu grosser Breite so auf die Fläche, dass er sich ihr ohne Widerstand möglichst anschmiegt, so nimmt er die Form einer geodätischen Linie der Fläche an.

(G. Diem.)

Abwicklung zweier Flächen auf einander.

215a. Schraubenfläche und drei darauf und auf einander abrollbare Rotationshyperboloide. Hergestellt im **Math. Institut der techn. Hochschule München.** (Prof. **Dyck**.)

Die „windschiefe Schraubenfläche“ $z = c \cdot \arctg \frac{y}{x}$ und die Hyperboloide $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ haben in den Punkten ihrer geraden Erzeugenden, welche gleich weit von der Axe bez. vom Kehlkreis abstehen, gleiches Krümmungsmass. Sie lassen sich daher auf einander abrollen — aber, wegen der Verschiedenheit der Winkel der auf beiden Flächen correspondirenden Systeme der Erzeugenden und Schraubenlinien bez. Erzeugenden und Parallelkreise, nicht ineinander verbiegen.

215 b. Zwei Modelle von Hyperboloidschraubenrädern. Angefertigt im mechanischen Institut von **J. Schröder** in Darmstadt; aus der **Kinematischen Sammlung der technischen Hochschule München.**

Die Modelle stellen das Abrollen je zweier Hyperboloide, (für welche die Constante c der obigen Gleichung (215a) auf einander dar. Beim ersten Modell sind die Zahnräder je im Kehlkreis der Hyperboloide eingesetzt, beim zweiten auf zwei beliebigen Parallelkreisen. Die Modelle lassen insbesondere deutlich erkennen, wie bei der Abwicklung stets correspondirende Punkte der beiden Flächen dadurch zur Deckung kommen, dass die beiden Kehlkreise, (welche in diesem Falle die Strictionslinie bilden) auf einander rollen; so wird ein Abrollen um, und ein gleichzeitig Verschieben längs der Erzeugenden („Schroten“) bewirkt.

Minimalflächen.

225. Minimalfläche fünfter Classe, 1880 modellirt von Schilling.

Zu den auf pag. 297 des Hauptkataloges gemachten Angaben ist noch nachzutragen, dass die modellirte Fläche gerade die von *Henneberg* (Inauguraldissertation) zuerst aufgestellte Fläche ist.

Q. Singuläre Vorkommnisse bei Curven und Flächen.

232. 10 Tafeln über die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen definirten Curvensysteme. Von Prof. **W. Dyck**, techn. Hochschule München.

Übersichtstabelle.

Die Tafeln geben die verschiedenen Typen der singulären Stellen nach der in Tafel I enthaltenen Übersicht.

Singuläre Stellen für $F(x, y, y') = 0$.

Tafel II: Typen der wesentlich singulären Stellen von $F(x, y, y') = 0$.

$$F = 0, \quad F_1 + y' F_2 = 0, \quad F_3 = 0$$

$M = \begin{vmatrix} F_{11} + 2y' F_{12} + y'^2 F_{22} & F_{13} + y' F_{23} + F_2 \\ F_{13} + y' F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}$	<table style="border-collapse: collapse; margin: 0 auto;"> <tr> <td style="padding: 0 5px;">M</td> <td style="padding: 0 5px;">N</td> <td style="border-left: 1px solid black; padding: 0 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="border-left: 1px solid black; text-align: center;">P_0</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">+</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="border-left: 1px solid black; text-align: center;">P_∞</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="text-align: center;">-</td> <td style="border-left: 1px solid black; text-align: center;">P_2</td> </tr> </table>	M	N		+	+	P_0	+	-	P_∞	-	-	P_2
M	N												
+	+	P_0											
+	-	P_∞											
-	-	P_2											

$N = 4M - F_2^2$

Diese 3 Typen können aus den in den oberen Figuren dargestellten singulären Stellen für eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung durch quadratische Transformation erhalten werden.

Tafel III: Ausserwesentlich singuläre Stellen von $F(x, y, y') = 0$, bez. $\Phi(x, y, c) = 0$.

$$F = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_{33} = 0; \quad \Phi = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad \Phi_{33} = 0.$$

Übergangsformen für $F(x, y, y') - k = 0$.

Diese Tafeln zeigen die Veränderungen, welche ein durch eine Differentialgleichung erster Ordnung definirtes Curvensystem erleidet bei Aenderung der Constanten der Differentialgleichung.

Tafel IV—VI: Zusammenrücken wesentlich singulärer Stellen:

$$F(x, y, y') - k = 0; F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0$$

M	$F_{33} F_{ik} $	
+	+	Tafel IV Fig. 1
—	—	Tafel IV „ 2 a b c
+	—	Tafel V „ a b c
—	—	Tafel VI „ a b c

Tafel VII und VIII: Zusammenrücken wesentlich und ausserwesentlich singulärer Stellen:

$$F(x, y, y') - k = 0; F_1 + y' F_2 = 0; F_3 = 0; F_{33} = 0$$

M	N	
+	—	(P_∞) Tafel VII
—	—	(P_2) Tafel VIII

Tafel IX und X: Zusammenrücken ausserwesentlich singulärer Stellen

$$\text{Tafel IX: } F(x, y, y') - k = 0; F_3 = 0; F_{33} = 0; F_{333} = 0$$

$$\text{Tafel X: } F(x, y, y') - k = 0; F_3 = 0; F_{33} = 0; F_1 F_{32} - F_2 F_{31} = 0.$$

Der genaue Verfolg aller dieser verschiedenen Übergangsformen für eine vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung, in welche ein zweckmässiger Parameter einzuführen ist, gestattet, die gestaltliche Anordnung der Integralcurven für eine solche Gleichung im allmählichen Entstehen anschaulich zu verfolgen.

Vergl. Dyck, Sitzungsber. der math. phys. Cl. d. k. b. Akad. d. W. 1891, 92.

(Dyck.)

232 a. Zwei Cartonmodelle zur Theorie der Differentialgleichungen von Privatdocent H. Brunn, Univ. München.

Die Modelle veranschaulichen in möglichst einfacher Weise das geometrische Datum einer Differentialgleichung von der Form

$$1) \quad P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Vergl. für die weiteren Beziehungen die Aufsätze von Voss, Math. Annalen 16 und 23.

Die vorliegenden Anordnungen der durch die Differentialgleichung gegebenen Punkt-Ebenen-Elemente beziehen sich speciell auf die Differentialgleichung

$$2) \quad y dx - x dy + k dz = 0$$

und lassen erkennen (die linke Seite von 2) ist kein totales Differential), wieso die Elemente dieses Nullsystems nicht zu Flächen zusammengefasst werden können.

III. Abteilung.

Angewandte Mathematik.

Erster Abschnitt. Mechanik.

R. Apparate und Modelle zur Demonstration von Sätzen der Dynamik.

233a. Modell zur Erklärung des Parallelogramms der Winkelgeschwindigkeiten, von Prof. **H. Hartl** in Reichenberg (Deutschböhmen.)

Der Apparat versinnlicht die Componenten und die Resultante für die Zusammensetzung zweier Winkelgeschwindigkeiten in der bekannten Weise durch die Zusammensetzung von Strecken nach Grösse und Richtung.

233b. Zwei Apparate zum Nachweise der Keil-Wirkung von Prof. **H. Hartl** in Reichenberg (Deutschböhmen), ausgeführt und ausgestellt von **M. Kohl**, Werkstätte für Präcisionsmechanik, Chemnitz in S.

Die Apparate bezwecken die Drucke, welche beide Seiten eines Keiles auf die Widerstandsflächen ausüben, zu demonstrieren.

Bei dem ersten der Apparate wird der Keil zwischen zwei mit Rollen und Gegengewichten versehenen Winkelhebeln im Gleichgewicht gehalten, bei dem zweiten zwischen zwei Stahlfedern, deren Spannung an getheilten Bögen abgelesen werden kann. Nähere Beschreibung in der Zeitschrift für Instrumentenkunde Bd. 5. 1892.

233c. Bewegliches Dynamometer, von Prof. **H. Hartl**, Reichenberg, ausgeführt und ausgestellt von **M. Kohl**, Werkstätte für Präcisionsmechanik, Chemnitz i. S.

Das Dynamometer dient zu messenden Versuchen mit constanten und variablen Kräften, insbesondere zu Versuchen an einfachen Maschinen, über die verschiedenen Arten der Reibung, über Stabilität etc. Beschreibung und schematische Darstellung des Apparates liegt bei.

- 233d. Apparat zur Demonstration von Grundgesetzen der Mechanik**, nach Prof. **Weinhold's** Demonstrationen, ausgeführt von **G. Lorenz**, Chemnitz i. S.

Die Apparate beziehen sich auf die Darstellung der Bewegung materieller Pendel, die Erläuterung des Begriffes des Trägheitsmomentes, endlich des stabilen und labilen Gleichgewichtes.

- 234a. Apparat für graphische Darstellung der parabolischen Bewegung** geworfener Körper aus dem mechanischen Institut von **Dr. Stöhrer und Sohn**.

An einer 80 cm breiten und 70 cm hohen, geschwärzten Holztafel ist eine gebogene, bewegliche Röhre, sowie am untern Teile eine ebenfalls verstellbare Röhre mit federndem Kolben angebracht. Der fallende oder geworfene Körper besteht aus einer Kugel von Kreide, welche die durchlaufende Parabel auf der Tafel sichtbar hinterlässt.

- 236a. Apparat zur Erklärung des stabilen und labilen Gleichgewichts** aus dem mechanischen Institut von **Dr. Stöhrer und Sohn**.

Die Kugeln sind verstellbar und können beide nach unten, in gleiche Axe mit dem Unterstützungspunkt, nach oben, oder auch einseitig nach oben oder unten gerichtet werden. Die Aenderung des Gleichgewichts-Verhältnisses je nach der Lage des Unterstützungspunktes zum Schwerpunkt kann mit diesem Apparate erschöpfend demonstriert werden.

- 239a. Apparat zur Ableitung des Begriffes des Trägheitsmomentes**, construiert nach Angabe von Oberlehrer **M. Koppe** in Berlin, verfertigt und ausgestellt von Mechaniker **A. Herbst** in Berlin.

Ein hölzernes Lineal von 1 m Länge schwebt ähnlich einer Compassnadel mittelst eines Hütchens horizontal auf einer Stahlspitze und kann in eine gleichförmig beschleunigte rotirende Bewegung um die Verticale des Aufhängepunktes versetzt werden. Zu dem Zweck ist der das Stahlhütchen aufnehmende, in der Mitte des Lineals über einer Durchbohrung befestigte Cylinder, von 1 cm äusserem Radius, in seinem oberen Teile mit einem Faden mehrmals umwunden, der wagerecht zu einer Rolle geführt und jenseits derselben mit einem Gewicht von 1 gr gespannt wird. Der untere Teil jenes Cylinders ist von vielen, auf das Lineal geschichteten, ringförmigen Gewichten centrirt umgeben, die zusammen 400 gr betragen. Man bestimmt die Zahl der Secunden, in der das Lineal seinen ersten Umlauf vollendet, und wiederholt diese Bestimmung, nachdem man von den in der Mitte aufgeschichteten Massen entweder 100 gr zu gleichen Teilen nach den beiden Endpunkten oder alle 400 gr nach den Mitten der beiden Arme verschoben hat. Die Umlaufszeit ergibt sich in diesen beiden Fällen gleich gross und zwar viel grösser als zuerst, also ist der verzögernde Einfluss der Masse m in der Entfernung r so gross als der der Masse mr^2 in der Entfernung 1. Die Reibung ist hier nicht störend, weil sie bei allen Versuchen gleich gross ist. Ferner ist das Trägheitsmoment eines zu verschiebenden Ringes zwar nicht dasselbe wie das seiner im Mittelpunkte vereinigten Masse, doch begründet dies keinen Einwand gegen die theoretische Grundlage des Apparates, denn der Unterschied ist eine Constante, die mit in das Trägheitsmoment des Lineals eingeht, da immer alle Ringe an der Bewegung teilnehmen. (Genaueres s. in der Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr., V. S. 8)

(M. Koppe.)

239b. Pendelvorrichtung zur Bestimmung der Trägheitsmomente ebener Figuren nach Angabe von Prof. **F. Kreuter** aus dem mathematischen Institut von **A. Ott in Kempten.** (1885.)

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes beruht auf den bekannten Sätzen: Das Trägheitsmoment eines Körpers T für eine bestimmte Rotationsaxe ist:

$$T = M(a^2 + r^2),$$

wo a den Abstand des Schwerpunktes von der Axe, r den Trägheitsradius des Körpers für die durch den Schwerpunkt gehende und zur ersten parallele Axe bezeichnet. Weiter steht r in Beziehung zur Länge l eines einfachen Pendels, welches mit dem zusammengesetzten die gleichen Schwingungen ausführt, durch die Formel

$$l = a + \frac{r^2}{a}$$

Bestimmt man also die Schwingungsdauer des Körpers, indem man eine grössere Zahl kleinerer Schwingungen desselben beobachtet, so lässt sich zunächst die Länge l des entsprechenden einfachen Pendels (nach der Formel: Schwingungsdauer $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$) bestimmen und hieraus nach Ermittlung des Abstandes a und der Masse M die Grösse des gesuchten Trägheitsmomentes T .

Die Vorrichtung ist speciell für die Bestimmung von Trägheitsmomenten ebener Figuren bestimmt, welche in Blechschablonen sich genau herstellen lassen und für welche die Ermittlung des Flächeninhaltes am einfachsten durch Wägung erfolgt, während die Bestimmung des Schwerpunktes durch Ausbalanciren auf zwei Zirkelspitzen mit genügender Genauigkeit vorgenommen werden kann. Für die Bestimmung der Schwingungsdauer werden die Schablonen in einer kleinen Klammer befestigt, welche auf zwei Schneiden schwingt. Hierbei ist also noch die Aufhängevorrichtung bei der Bestimmung des Trägheitsmomentes in entsprechender Weise zu berücksichtigen*). Man kann dies umgehen, wenn man, wie Ingenieur *K. Pressel* angibt, die Schablonen einfach auf zwei Nadelspitzen schwingen lässt. Der Apparat lässt dann an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Die Genauigkeit des Verfahrens steht nach angestellten Versuchsreihen mit der graphischen Methode auf gleicher Stufe; dagegen erfordern sowohl die rechnerische, wie die graphische Bestimmung wesentlich mehr Zeitaufwand, was bei häufig zu wiederholenden Versuchsreihen (wie etwa bei der Prüfung verschiedener Eisenbahnbauarten oder Schienenquerschnitte) nicht unwesentlich ist. Der Zeitaufwand entspricht etwa dem für die Bestimmung durch das Momentenplanimeter erforderlichen. (Bezüglich weiterer Angaben vergleiche man die Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Band 29.)

239c. Eisenlohr's Apparat zur Erklärung des Foucault'schen Pendels, ausgestellt von Oberlehrer **M. Koppe** in Berlin.

Der Apparat zeigt, dass die Geschwindigkeit, mit der sich die Schwingungsebene des Foucault'schen Pendels dreht, dem Sinus der geographischen

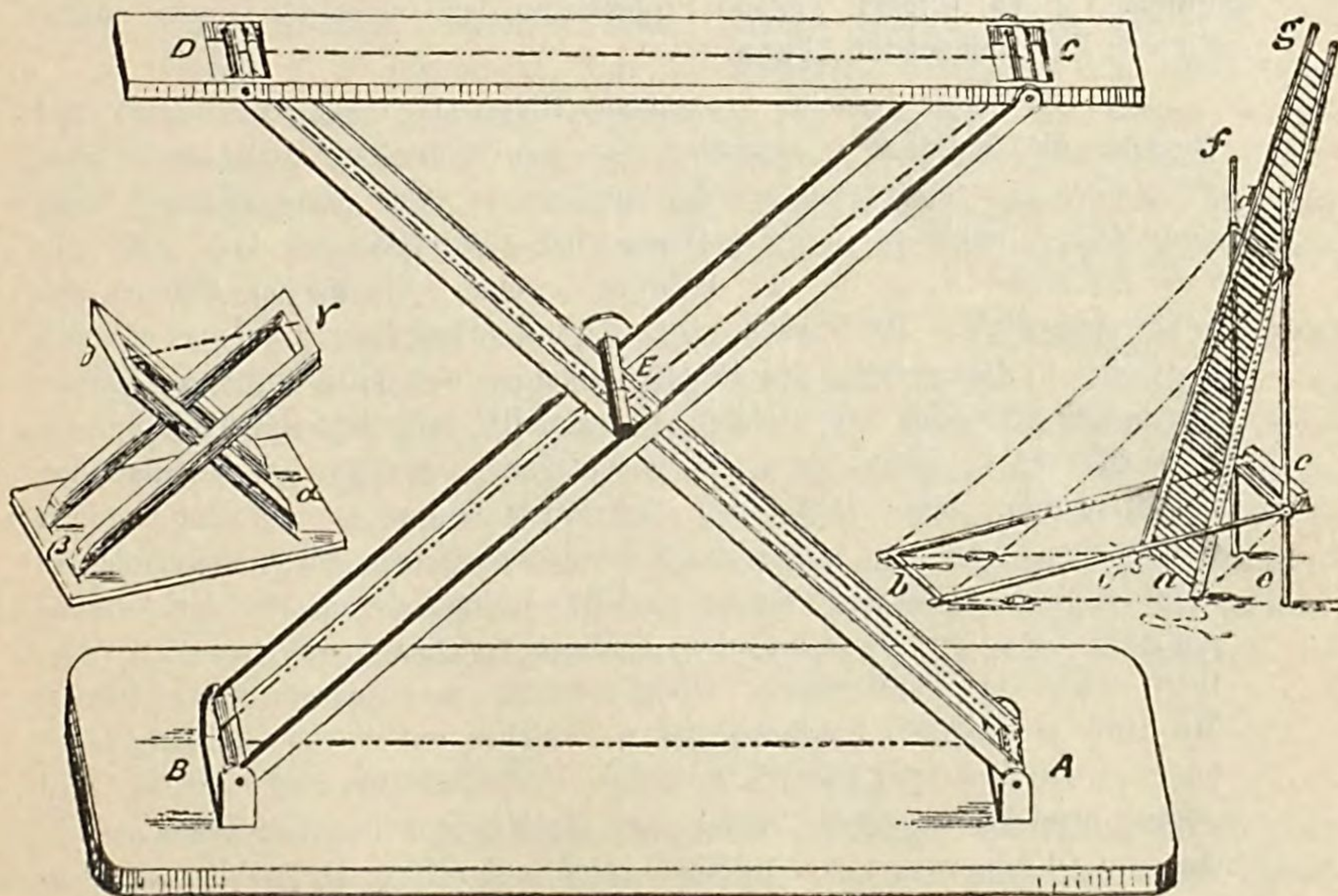
*) Jedem Apparat sind die hiezu nötigen Constanten beigegeben.

Breite proportional sein muss. Die Erde wird durch einen Meridianring dargestellt, längs eines Durchmessers ist eine gespannte Spiralfeder angebracht, die in der Mitte eine Kugel trägt. Während auf eine wirkliche Pendelkugel nur nach oben die Spannung eines Fadens, nach unten aber die Schwere wirkt, sind hier beide Kräfte durch elastische Spannungen ersetzt. Zur Seite gezogen führt die Kugel Pendelschwingungen z. B. in der Ebene des Meridians aus. Der Meridianring kann in einer ihn umschliessenden Führung beliebig festgestellt und mit letzterer leicht um eine verticale durch das Centrum gehende Axe gedreht werden. Ist die Gleichgewichtslage der schwingenden Spirale vertical gestellt, so bleibt die Schwingungsebene absolut fest, während man den Meridianring dreht. Ist die Spirale wagerecht, so bleibt die Lage der Schwingungsebene zu der des Meridians unverändert. Bildet die Spirale mit der Wagerechten den Winkel $\varphi = 30^\circ$, so dreht sich die Schwingungsebene um je 45° in Bezug auf die Ebene des Ringes, wenn man letzteren um je 90° dreht. Für $\varphi = 52\frac{1}{2}^\circ$ (Breite von Berlin) entspricht einer Drehung des Ringes um 5 Rechte eine solche der Schwingungsebene um 4 Rechte, so dass nach vollzogener Drehung die Schwingungen wieder in die Ebene des Meridians fallen. (Genauere Angaben in der Zeitschrift für phys. u. chem. Unterr., I, S. 18).

(M. Koppe.)

239d. Mechanische Wippe (Mechanical Rocker) nach Angabe von Prof. Th. Alexander, Trinity College Dublin, und Prof. A. Thomson, Science College Poona.

Ein Rahmen CD (vergl. die Figur) wiegt an zwei Doppelstäben AD und BC hin und her. Die Drehpunkte A und B liegen horizontal und es ist $AB = CD$. In dem ausgestellten Modell ist ferner $BD < BA$. Das Gleichgewicht ist stabil, wenn CD horizontal liegt, und der Mechanismus



wiegt sich um diese Gleichgewichtslage mit einer Schwingungsdauer von ungefähr 1". Verschiebt man den Apparat so, dass der $\angle DEC > R$ wird so kippt der Apparat um.

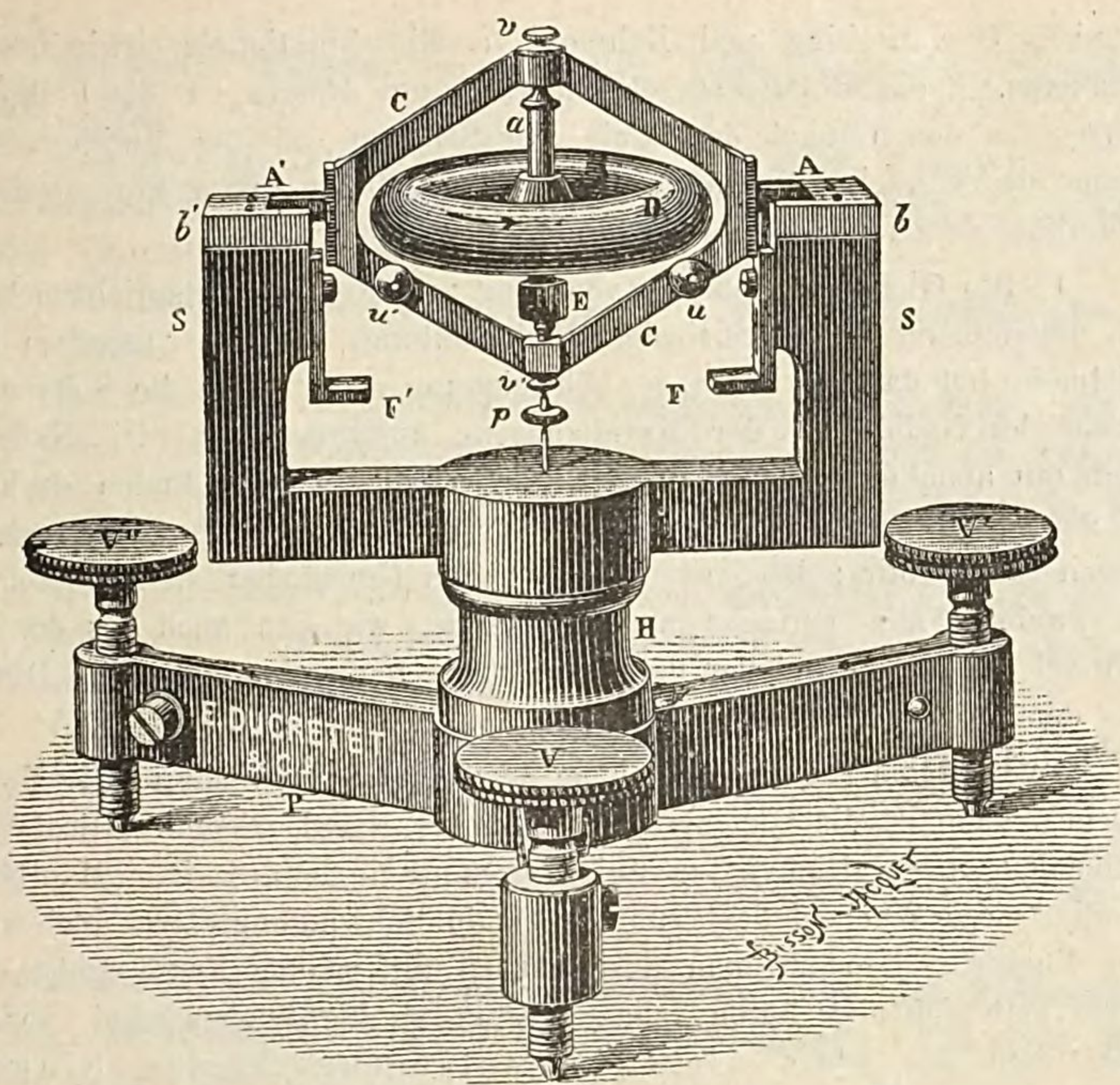
Die Periode für kleine Schwingungen hat Prof. Sarledon, University of Dublin, untersucht. Der Mechanismus wird angewendet für Beleuchtungsgerüste und als Rettungsleiter. Da der Schwerpunkt des ganzen Mechanismus sich nahezu in gerader Linie (genauer einem Stücke der Fusspunktscurve einer Ellipse) bewegt, so ist die zum Hinaufbefördern von Menschen und Material aufzuwendende Arbeit ein Minimum. Durch eine geeignete Verbindung mit einer Kette ohne Ende und einer Winde kann ein Mann sich selbst hinauf- und herablassen. Eine andere Form der Wippe lässt sich zur Bestimmung der Erschütterung bei Erdstößen verwenden. Eine Anzahl kleiner Wippen von verschiedener Schwingungsdauer wird auf einem steinernen Pfeiler aufgestellt; die Schwingungen derjenigen Wippen, für welche die Amplitude mit den Erschütterungen der Erdstöße zusammenfällt, werden vergrößert, die anderen schwanken nur wenig wegen der eintretenden Interferenzen. Noch eine andere Form für die labile Gleichgewichtslage kann als Auslöseapparat dienen. Der erste Stoss bewirkt die Bewegung des Apparates und kann so einen elektrischen Contact oder eine Selbstregistriermaschine auslösen. (Die ausgestellten Modelle sind Eigentum der kgl. irischen Akademie, die ausführliche Beschreibung findet sich in den Transactions derselben, Band 29, Teil 19.)

(Th. Alexander und A. Thomson.)

239e. Zwei Kreisel mit Glastafel und Zeichenvorrichtung zur Darstellung der Nutation von **Schmidt** in Dresden, ausgestellt von **G. Lorenz**, Chemnitz.

239f. Einfaches und doppeltes Barogyroscop zur Demonstration der Erdrotation von **Th. Gilbert**, weiland Professor an der Universität Löwen, ausgestellt von der **Universität Löwen**.

Das Gyroscop besteht aus einem Ringe D (vergl. die Figur) aus Bronze; die Stahlaxe a desselben ist mit konischen Spitzen in zwei Schrauben v, v' eingesetzt, welche ihrerseits in den aus englischem Stahl hergestellten Rahmen C C' eingelassen sind. Der Rahmen C C' ruht mit zwei Schneiden A, A' in der Höhlung zweier cylindrischer Flächen aus gehärtetem Stahl. Das System D C ist mit möglichster Genauigkeit symmetrisch zur Hauptebene des Ringes, welche gleichzeitig durch die Kanten der beiden Schneiden hindurchgeht, hergestellt; seine Beweglichkeit um die Schneiden ist so gross, dass ein leiser Hauch genügt, um Oscillationen hervorzurufen. Durch Verstellen der Schrauben v, v' und der kleinen beweglichen Massen u, u' lässt sich durch successives Probiren erreichen, dass der Schwerpunkt des Ringes und des Rahmens sich auf der Aufhängungsaxe (der Linie der Schneiden) befindet, so dass das System sich möglichst nahe in indifferentem Gleichgewichte um diese Axe befindet. Mit Hilfe des kleinen Laufgewichtes p, welches mit starker Reibung längs einer in den Kopf der unteren Schraube v' eingesetzten Nadel gleitet, wird sodann erreicht, dass diese Nadel und die Ringaxe in verticaler Lage in stabilem Gleichgewicht sich befindet, solange der Ring D in Ruhe ist, wo-



von man sich dadurch überzeugt, dass man das System um die Aufhängaxe pendeln lässt.

Die Lager S für die Schneiden werden derart auf einen Fuss H aufgesetzt, dass sie sich mit starker Reibung um eine verticale Axe drehen lassen, so dass man die Verticalebene durch die Aufhängaxe successive in jeden Meridian einstellen kann. Endlich sind auf dem Träger S zwei Gabeln F, F' angebracht, um die Schneiden aufzulegen und dann genau in ihre Lager einsetzen zu können. Auf der Axe des Ringes ist ein stählernes Zahnrad E eingesetzt, welches in Verbindung mit einem Rädermechanismus oder einem Foucault'schen Triebwerk dazu dient, den Ring in eine möglichst rasche Rotation (ungefähr 150 Umdrehungen pro Secunde) zu versetzen.

Hat man Hilfe der Stellschrauben V V' V'' die Aufhängeaxe horizontal gestellt, so nimmt man den Ring mit seinem Rahmen vom Apparat weg und setzt den Ring in bestimmtem Sinn mit Hilfe des Rotationsapparates in Bewegung. Hierauf bringt man das System (mit Hilfe des Gabelführers) auf seine Lager und überlässt es sich selbst. Es zeigt sich dann, dass im Allgemeinen die Nadel des Gyroscopes von ihrer verticalen Lage abgelenkt wird. Die theoretische Discussion der Anordnung ergiebt die folgende Formel für den Ablenkungswinkel E der Nadel (Richtung der Ringaxe) von der Verticalen:

$$\operatorname{tg} E = \frac{C \omega n \cos L \cos \alpha}{g \mu \delta - C \omega n \sin L'}$$

dabei bedeutet C das Trägheitsmoment des Ringes mit Bezug auf die Axe μ die Masse des kleinen Laufgewichtes, δ dessen Entfernung vom Schwer-

punkte O von Ring und Rahmen, ω die Rotationsgeschwindigkeit des Planeten, n die Rotationsgeschwindigkeit des Ringes, L die Polhöhe des Ortes, α den Winkel der Linie der Schneide mit der Meridianebene im Sinne des Uhrzeigers gezählt. Man erkennt die in dieser Formel liegenden Resultate durch folgende Erscheinungen am Instrument:

1) Die Gleichgewichtslage von Ring und Rahmen entspricht nicht mehr im allgemeinen einer verticalen Nadelstellung, wie bei ruhendem Ringe, vielmehr hat das Maximum der Abweichung statt, wenn die Schwingungsebene der Nadel mit der Meridianebene zusammenfällt. Die Nadel wird sich mit abnehmender Schwingung gegen Norden oder Süden drehen, je nachdem der Ring von oben betrachtet im Sinne des Uhrzeigers oder entgegengesetzt rotirt; dabei ist unter gleichen Umständen die Nadelablenkung im zweiten Falle geringer als im ersten, wie sich auch aus der obigen Formel ergibt, in welcher der Nenner für den ersten Fall eine Differenz, für den zweiten Fall eine Summe ist.

2) Steht die Schwingungsebene der Ringaxe senkrecht auf der Meridianebene, dann ist die Gleichgewichtslage der Nadel wieder vertical wie bei ruhendem Ring, gleichviel in welchem Sinne derselbe rotirt. Man bewerkstelligt diesen Wechsel des Azimutes für die Schwingungsebene auch während des Versuches, indem man das Lager S auf seinem Fusse dreht. Dabei muss man sich aber hüten, die Schneide zu verschieben und vor allem darf man das Lager nicht im entgegengesetzten Sinne der Rotation des Ringes drehen, was unmittelbar das ganze System zum Kippen bringen würde.

3) In den zwischenliegenden Azimuten stellt sich die Nadel in eine zwischen den Extremen liegende Gleichgewichtslage.

4) Die Neigung der Nadel wird, wie aus der obigen Formel folgt, um so stärker, je geschwinder der Ring rotirt, je grösser sein Durchmesser ist, je kleiner die Polhöhe des Ortes, je geringer die Distanz δ des Laufgewichtes vom Schwerpunkt O .

5) Wie aus der Formel folgt, ist die Nadelablenkung gegen die Verticale unabhängig von der Masse des Rahmens, aber die Schwingungsdauer der Nadel ist davon beeinflusst. Diese Schwingungsdauer muss soviel wie möglich abgekürzt werden, um den Apparat möglichst empfindlich zu machen. Man muss daher 1) das System so beweglich wie möglich um die Schwingungsaxe machen, was durch die Schneidenaufhängung am besten hergestellt wird. 2) Ist der Rahmen möglichst leicht herzustellen und möglichst die Zufügung weiterer von der Aufhängungsaxe entfernter Massen zu vermeiden. 3) Der Ring muss einen möglichst grossen Durchmesser erhalten und die Rotationsgeschwindigkeiten n so gross wie möglich gemacht werden.

Durch allmähliche Versuche erhält man die günstigsten Anordnungen und so wurde auch bei der Construction des vorliegenden Apparates verfahren. Als Beispiel sei angeführt (Längeneinheit in dm):

Ring: Radius des erzeugenden Kreises = 0,1; Entfernung seines Mittelpunktes von der Ringaxe = 0,35; Dicke der eingeschalteten Mittelebene = 0,04; Radius der Axe = 0,03; Länge der Axe = 0,6;

Rahmen: Diagonale = 0,8; 1,2; Dimensionen im Querschnitt = 0,07; 0,04;

Laufgewicht: Durchmesser = 0,08; Höhe 0,02; $\delta = 0,5$;

Dichtigkeitsverhältnis zwischen Stahl und Bronze 0,8965; $n = 1256,637$ (200 Touren in 1"; $\omega = 0,000073$; $L = 48^{\circ}50'39''$).

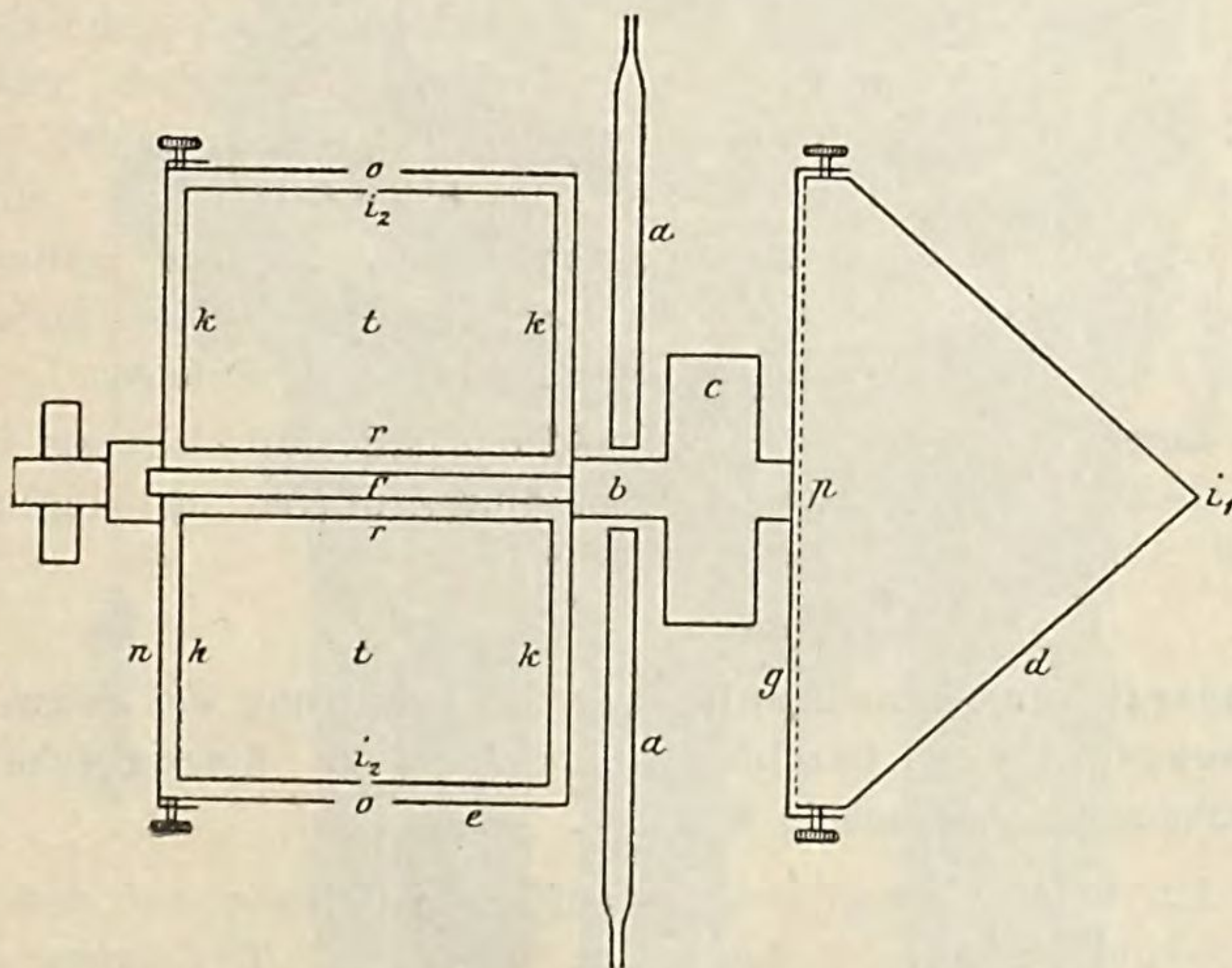
Resultat: Ablenkung $E = 7^{\circ}37'10''$; Schwingungsdauer der Nadel $I = 3'',76$.

Das zweite der Instrumente ist die Verdoppelung des ersten. Die beiden auf einem Rahmen aufgesetzten Ringe lassen sich durch die Antriebsvorrichtung in gleicher Richtung mit gleicher Geschwindigkeit in Rotation versetzen.

Die ausgestellten Instrumente sind vom Mechaniker *E. Ducretet & Co.* in Paris construiert und gestatten mit ziemlicher Exactheit die Beobachtung der angegebenen Erscheinungen.

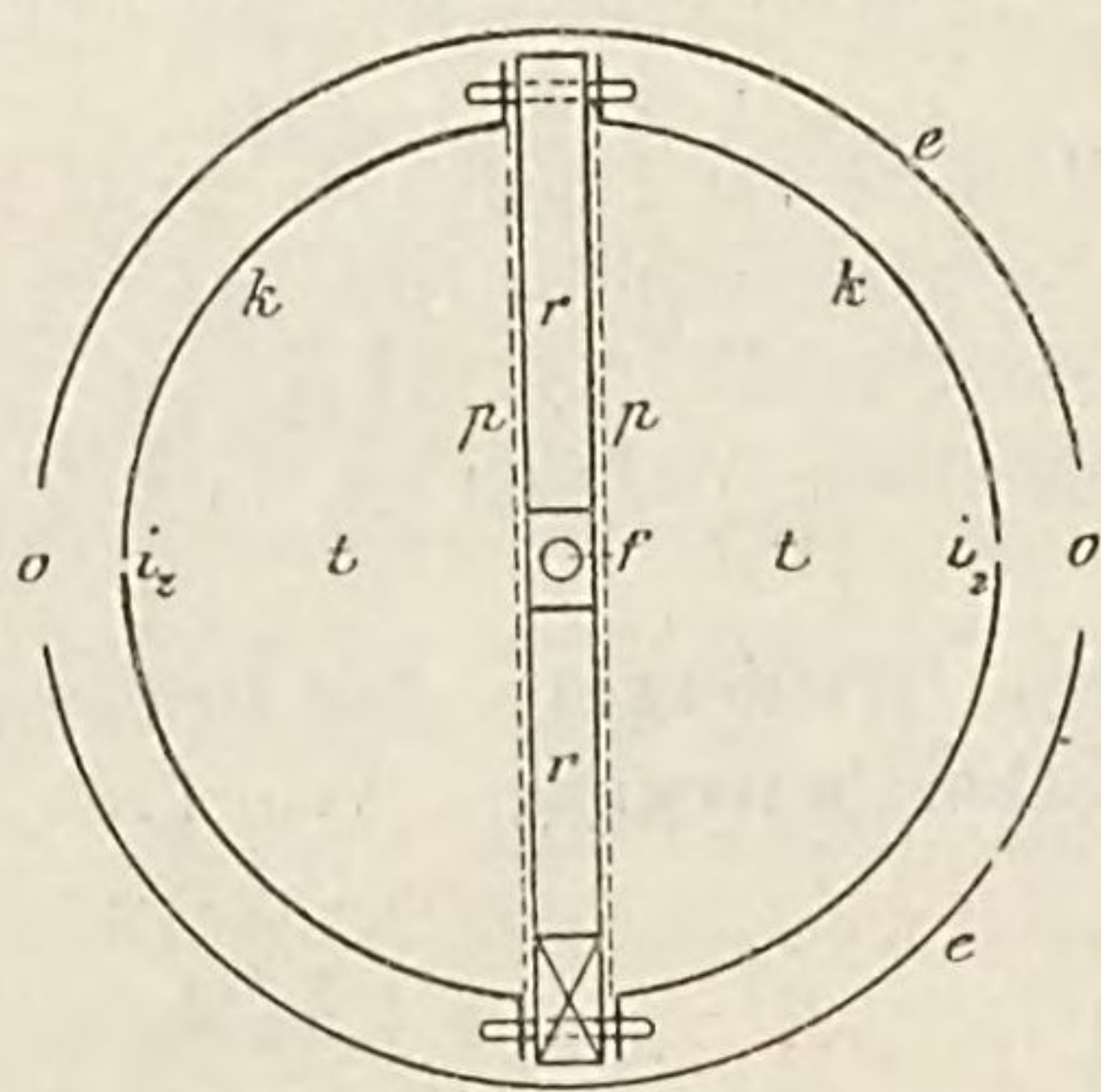
(Auszug aus dem Aufsätze: „Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers Problèmes de mouvement relatif par *Ph. Gilbert* Professeur à l'université catholique de Louvain“ in „Annales de la société scientifique de Bruxelles“ 7. Jahrgang 1882–83, pag. 66, 77 u. ff.)

239 g. Vorrichtung zur photographischen Wiedergabe der Präcessionsbewegung, insbesondere bei der Geschossbewegung. Von Prof. Neesen, Artillerieschule Berlin.



In dem letzten Ringe des Bohnenbergerschen Apparates ist eine Axe *a* gelagert, durch welche, drehbar in ihr gelagert, die Axe *b* der photographischen Einrichtung hindurchgeht. Auf *b* ist ausser einer Schnurrolle *c*, die zur Drehung von *b* mittelst Schnurabziehen dient, eine Platte *g* befestigt. Ein kegelförmiger Deckel *d* mit einer kleinen Öffnung *i* in der Spitze wird auf *g* gesetzt und hält eine photographische Platte *p* (aus Bromsilber-Gelatine) fest. An der anderen Seite der Axe ist eine Trommel *e* mit zwei diametral gegenüberliegenden Öffnungen *o* angebracht. Ein Deckel *n* verschliesst die Trommel. Auf einem Stifte *f* im Innern der Trommel ist lose

gelagert eine zweite Trommel t bestehend aus einem Rahmen r , auf welchen durch 3 Schraubenbolzen zwei cylindrische Kappen k befestigt werden. Jede dieser Kappen hat eine kleine Öffnung i . Durch das Aufsetzen der Kappen k werden gleichzeitig zwei photographische Platten auf r festgeklemmt. Die Trommel t ist möglichst leicht und ihr Schwerpunkt durch seitliche Belastung möglichst weit aus der Lage der Axe f herausgerückt. Durch eine besondere Vorrichtung lässt sich die Trommel t mit der umgebenden Trommel kuppeln. Wird nun die Axe b in Rotation gesetzt und der Apparat so gestellt, dass die Sonnenstrahlen durch i auf die Platte p fallen, so bildet sich, wenn die Axe keine Präcessionsbewegung macht, ein Kreis. Schwankt die Axe aber hin und her, so entsteht statt des Kreises eine Spirale. Lässt man die Sonnenstrahlen seitlich auf die Öffnungen o fallen, so entstehen, wenn die beiden Trommeln t und e gekuppelt sind, auf jeder der beiden, den



Öffnungen i gegenüberliegenden photographischen Platten eine Ellipse, wenn Axe b nicht schwankt. Schwankt b hin und her, so entstehen eine Reihe conaxialer Ellipsenzüge. Wird nun die Kuppelung zwischen den beiden Trommeln gelöst, so dass die Trommel t nicht mit rotirt, und lässt man die Sonnenstrahlen wieder seitlich durch i fallen, so wird auf der einen Platte p nichts gezeichnet zum Beweise, dass Trommel t wirklich nicht an der

Drehung teilgenommen hat. Auf der den Sonnenstrahlen zugewandten Platte p entstehen Punkte — bei jeder halben Umdrehung einer. — Aus der Lage dieser Punkte kann die Schwankung der Axe bestimmt werden.

Eine ähnliche Einrichtung im Innern eines Geschosses angebracht, erlaubt die konische Pendelung der Geschossaxe zu verfolgen.

Vergl. hiezu den Aufsatz „Photographische Aufzeichnung und Theorie der Geschosspendelung“, und Archiv für Artillerie- und Ingenieur-offiziere 1889, S. 68. (Neesen.)

240a. Apparat zur Veranschaulichung der Erhaltung des Schwerpunktes, beziehungsweise des Beschleunigungsdruckes. Kinematische Sammlung der technischen Hochschule München.

Ein Wagen bewegt sich frei auf einem Geleise; auf dem Wagen ist ein Schubkurbelgetriebe angebracht, an dessen Triebstange sich grosse Massen befinden. Das Schubkurbelgetriebe kann mittelst einer Radübertragung von einem festen Rade aus in Bewegung gesetzt werden. Dabei gerät der Wagen in eine oscillirende Bewegung, der durch die Bewegung des Kurbelgetriebes bewirkten Verschiebung des Schwerpunktes entsprechend. Durch Festhalten des Wagens lässt sich der Beschleunigungsdruck demonstrieren. Auf dem Schwungrade des Kurbelgetriebes können Bleisegmente angebracht werden, welche die Verschiebung des Schwerpunktes aufheben.

240b. A. Toepler's Vorlesungsapparat zur Statik und Dynamik starrer Körper, construiert von Mechaniker **Leuner**, technische Hochschule Dresden.

Die Construction dieses Apparates ist aus dem Bedürfnis nach einem einzigen, bequemen Hilfsmittel entstanden, welches eine ausgiebigere experimentelle Behandlung einzelner Abschnitte der Mechanik ermöglicht, als die hierzu gewöhnlich gebräuchlichen Apparate gestatten. Die nachfolgende Beschreibung des *Toepler'schen* Vorlesungsapparates, welcher die Aufzählung einer Reihe der damit ausführbaren wichtigsten Experimente angefügt ist, lehnt sich an die von Dr. *R. Hennig*, in der Zeitschrift für physikalischen und chemischen Unterricht, Jahrgang 1888, Seite 137—148 gegebene, mit vielen Figuren ausgestattete, an. Dieser Arbeit, auf welche zur weiteren Orientirung ausdrücklich verwiesen wird, sind auch die hier

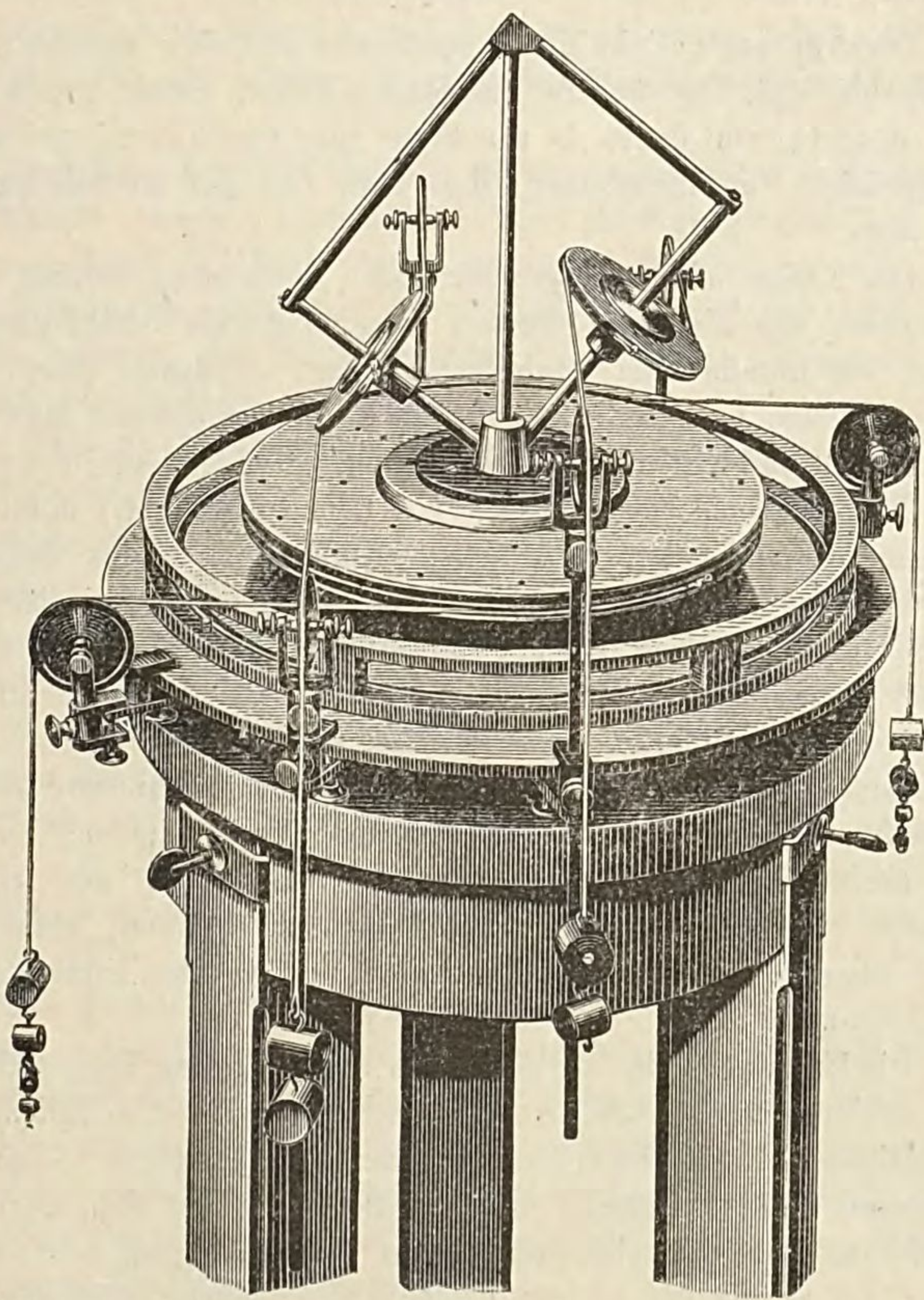


Fig. 1.

beigegebenen fünf Figuren entnommen worden. Von diesen gibt Fig. 1 eine perspectivische Ansicht des ganzen, für einen bestimmten Versuch eingestellten Apparates, Fig. 2 einen Verticalschnitt durch die Hauptbestandteile desselben, die Fig. 3—5 zeigen Versuchsanordnungen in schematischer Darstellung. Die der folgenden Beschreibung eingefügten Buchstaben beziehen sich auf Fig. 2.

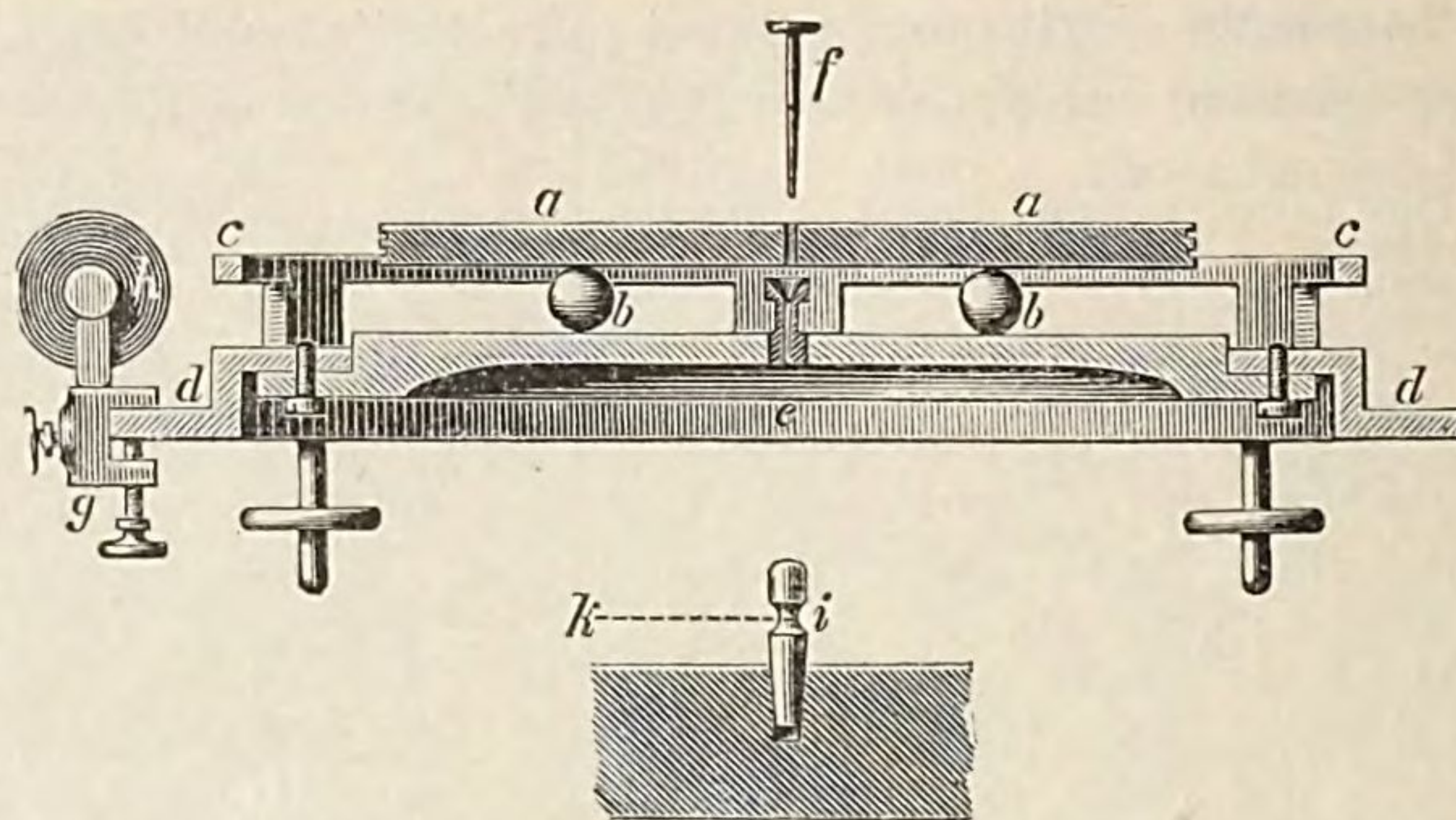


Fig 2.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus einer schweren, gusseisernen Kreisscheibe (a, Fig. 2), die mittelst dreier, genau gleich grosser Hartbronzekugeln, von denen in der Figur nur zwei (b) sichtbar sind, auf einer horizontalen Unterlagsplatte (d e d) ruht und auf ihr beliebig bewegt werden kann.

Die Kreisscheibe von grosser Masse (etwa 14 kg) enthält an ihrer Oberfläche, wie aus Fig. 1 zu ersehen ist, eine grosse Anzahl geeignet angeordneter und nummerirter conischer Löcher, in denen durch Gewichte gespannte Fäden befestigt werden können, welche die auf die Scheibe wirkenden Kräfte darstellen. Die Befestigung geschieht rasch und sicher mittelst kleiner, conischer Stöpsel, von denen einer bei i unter Fig. 2 etwas grösser abgebildet ist. Um den verjüngten Hals des Stöpsels wird eine aus der Ferne gut sichtbare, genügend starke, weiche, weisse Seidenschnur (k) mit einer Schlinge gelegt und mittelst Leitrolle (h) und Gewicht gespannt. Ein besonderer stärkerer Stöpsel ist für das Centrum der Guss-eisenscheibe bestimmt. Diese ist daselbst durchbohrt; durch die Oeffnung kann ein Centrirstift (f) in die gleichfalls durchbohrte Mitte der Unterlagsplatte eingesteckt werden, so dass die Scheibe nur noch Drehbewegungen um ihren Mittelpunkt auszuführen vermag. Um der frei beweglichen Scheibe constante Drehmomente erteilen zu können, enthält deren Rand zwei eingedrehte rechtwinklige Rillen, in welche belastete Fäden einzulegen sind.

Die Unterlagsplatte ist gleichfalls aus Gusseisen hergestellt und besteht aus zwei durch Schrauben verbundenen concentrischen Teilen, deren innerer — gleichwie die Kreisscheibe an ihrer unteren Seite — eine eingekittete Spiegelglasscheibe besitzt, um die Beweglichkeit der Kugeln durch Verminderung des Reibungswiderstandes möglichst gross zu machen. In der Mitte (bei e, Fig. 2) ist ein conisch ausgebohrter Messingcylinder eingeschraubt, der als Lager für den Centrirstift (f) dient, und dessen oberer Teil trichterförmig ausgeweitet ist, um ein leichteres Centriren der Kreisscheibe zu gestatten. Die Unterlagsplatte ist mit einer geländerartigen Umrandung (c) versehen, welche die Bewegung der Kreisscheibe begrenzt, aber den Zwischenraum zwischen Scheibe und Platte bequem zugänglich lässt. Die Oberfläche dieser Umrandung trägt eine von 5^0 zu 5^0 fortschreitende Kreistheilung, das untere Ende läuft in eine horizontale Flansche (d) aus. Drei

durch die letztere geführte Fusschrauben ermöglichen es schliesslich, auf fester Unterlage die Oberfläche der eingesetzten Spiegelglasscheibe mit Hilfe einer feinen Libelle genau horizontal zu stellen und so die bewegliche Scheibe der directen Einwirkung der Schwerkraft zu entziehen. Ausser den beiden Hauptteilen gehören zum bequemen und vielseitigen Gebrauche des Apparates verschiedene Nebenbestandteile. Als solche sind zu nennen:

1. Ein $1\frac{1}{2}$ Dutzend zur Führung der belasteten Fäden dienende Leitrollen (h, Fig. 2), die vermittelst Schraubzwingen (g) auf der Flansche (d) der Unterlagsplatte befestigt werden. Die aus Rotguss leichtgearbeiteten Rollen sind frei um eine horizontale Axe, ausserdem aber auch nach Lüftung einer Schraube um eine verticale Axe in der Schraubzwinde (g) bewegbar, und lassen sich im Bedarfsfalle vermittelst in die Schraubzwingen eingefügter verticaler Verlängerungsstangen in beliebiger Höhe, sowie mit Hilfe horizontaler eiserner Schienen, die dann ihrerseits am Rande der Unterlagsplatte festgeschraubt werden, in grösserem Horizontalabstande am Apparate befestigen.

2. Zwei Klammern aus Messing, die am Geländer des Apparates (c, Fig. 2) festgeschraubt werden können und deren hervorragendes Ende mit einem Stifte in ein Loch der Kreisscheibe eingreift. Durch Verwendung von zwei solchen Klammern wird die starre Verbindung der Scheibe mit der Unterlagsplatte bewirkt, die zur Vorbereitung der meisten Versuche notwendig oder doch zweckmässig ist.

3. Zwei eiserne Lenkerstangen, die den Zweck haben, der Kreisscheibe Zwangsführungen zu erteilen, so dass dieselbe nur noch ganz bestimmte Bewegungen auszuführen vermag. Diese mit Löchern versehenen Lenkerstangen sind an einem Ende um verticale Axen drehbar, die mit Schraubzwingen am Rande der Unterlagsplatte zu befestigen sind; das andere Ende greift mit einem drehbaren Stifte in ein Loch der Kreisscheibe ein.

4. Zwei Kreisscheiben verschiedenen Durchmessers aus hartem Holze, mit Nuten am Rande zur Aufnahme von zu belastenden Fäden. Diese Holzscheiben sind in der Mitte durchbohrt, um den Centrirungsstift durchzulassen; sie sind in horizontaler Lage auf die Kreisscheibe aufzustecken und gestatten dann leicht die Anbringung von Kräftepaaren mit constantem Drehmomente.

5. Eine grosse Anzahl Gewichtsstücke, von denen jedes, wie aus Fig. 1 zu ersehen, zwei Haken besitzt, so dass dieselben an einander angehakt und in beliebigen Gruppen gemeinschaftlich an die Fäden gehängt werden können.

6. Eine hölzerne zangenartige Stellvorrichtung, mit deren Hilfe die drei Bronzekugeln zweckmässig so angeordnet werden können, dass sie die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Mittelpunkt in der Durchbohrung der Unterlagsplatte liegt, bilden.

7. Ein Parallellineal, um die durch Gewichte gespannten Fäden eventuell schnell parallel stellen zu können.

Dem ganzen Apparate werden zur Demonstration bestimmter Sätze der Mechanik noch besondere Nebenapparate beigegeben, die auf einer eisernen Platte montirt sind und mit zwei an derselben befindlichen Stiften in zwei der conischen Löcher der Kreisscheibe passen, wodurch die Verbindung mit der Kreisscheibe hergestellt wird. Als solche sind zu nennen

1. Ein eiserner Aufsatz zur Demonstration der räumlichen Zusammensetzung von Kräftepaaren. Dieser in Figur 1 in Verbindung mit dem ganzen Apparat abgebildete Aufsatz ist im Wesentlichen ein Parallelogramm aus quadratischen Eisenstäben, auf dessen Seiten sich gleichgrosse Kreisscheiben aus Hartgummi verschieben lassen, um die Ebenen der wirkenden Kräftepaare parallel vorrücken zu können. Eine ebensogrosse dritte Hartgummischeibe ist unten an der Aufsatzscheibe senkrecht zur Diagonale des Parallelogramms angebracht.

2. Ein Apparat zur Demonstration des Satzes von der Erhaltung der Flächen.

In das Centrum der eisernen, mit der Kreisscheibe eine starr zusammenhängende Masse bildenden runden Unterlagsscheibe dieses Nebenapparates ist ein massiver Zapfen eingelassen, auf dem oben mit Spitze, fast ohne Reibung, ein eisernes Schwungrad horizontal gelagert ist. Diese letztere leicht bewegbare Masse ist mit der der Kreisscheibe durch eine am Zapfen der Aufsatzscheibe befestigte Spiralfeder verbunden, durch welche sie gegen die untere Masse der Kreisscheibe relativ in Bewegung gesetzt werden kann. Die Kreisscheibe enthält alsdann immer die entgegengesetzte Drehung, wie dies nach dem Flächengesetz geschehen muss.

3. Ein Apparat zur Demonstration des Satzes von der Erhaltung des Schwerpunktes. Die eiserne Unterlagsplatte desselben besitzt zwei parallele Schienen, auf denen längs eines Durchmessers der Kreisscheibe eine mit vier Röllchen versehene schwere Eisenmasse, die an vier verticalen federnden Stahlfedern aufgehängt ist, sich bewegen kann. Die Spannung der Federn ist leicht regulirbar; sie ist so zu bemessen, dass die Masse fast gänzlich entlastet ist, worauf letztere unter alleinigem Einflusse der Federkräfte eine schwingende Bewegung um die Mittellage auszuführen vermag. Die hierbei parallel geführte Kreisscheibe und die schwingende Masse nehmen alsdann entgegengesetzte Bewegungsrichtung an. Zwei in einer Verticalebene der schwingenden Bewegung liegende, durch Stiftchen markirte Punkte der bewegten Massen sind durch ein leichtes Schienchen verbunden, das um den Punkt der einen Masse drehbar, mittelst Schlitzführung längs des Punktes der anderen Masse verschiebbar ist. Der bei der entgegengesetzten Bewegung der Massen in Ruhe bleibende Punkt des eine verticale Drehbewegung ausführenden Verbindungsschienchens ist auf demselben durch ein Papierscheibchen kenntlich gemacht und wird durch eine, vom schwingenden System ganz unabhängig an der Umrandung der festen Unterlagsplatte angebrachte Kugel im Raum vor demselben markirt.

Die Vielseitigkeit der Verwendung des vorgeschriebenen wahren Universalapparates für die Mechanik starrer Körper mag aus der Aufführung einer Anzahl lehrreicher Experimente, die damit anstellbar sind, erkannt werden.

Der Apparat gestattet zunächst die Demonstration der Gleichgewichtsbedingungen bei freier und erzwungener Beweglichkeit der Kreisscheibe in der Ebene. Bei ersterer lässt sich zunächst der wichtige Satz vom ebenen Kräftepolygon demonstrieren und dabei zeigen, dass ohne Störung des bestehenden Gleichgewichts am starren Körper der Angriffspunkt einer Kraft in der Krafrichtung beliebig verlegt werden kann,

ferner das Gleichgewicht paralleler Kräfte, wobei zu erkennen ist, dass mit Bezug auf irgend einen Punkt der Kreisscheibe das Moment der Resultierenden gleich der Summe der Momente der Componenten ist. Hieran anschliessend kann veranschaulicht werden die charakteristische Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte, sodann die mannigfachen Bedingungen, von denen die drehende Wirkung eines Kräftepaares in der Ebene beeinflusst wird oder nicht, ferner die Zusammensetzung der Kräftepaare in der Ebene und im Raume, sowie die Gleichgewichtsbedingung für Kräftepaare im Raume. Der Apparat ermöglicht die allgemeinste Bedingung zu demonstrieren, unter welcher ein in der Ebene frei beweglicher Körper unter dem Einflusse beliebig gerichteter, in beliebigen Punkten angreifender räumlicher Kräfte im Gleichgewicht ist. An der frei beweglichen Kreisscheibe lässt sich auch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bequem veranschaulichen.

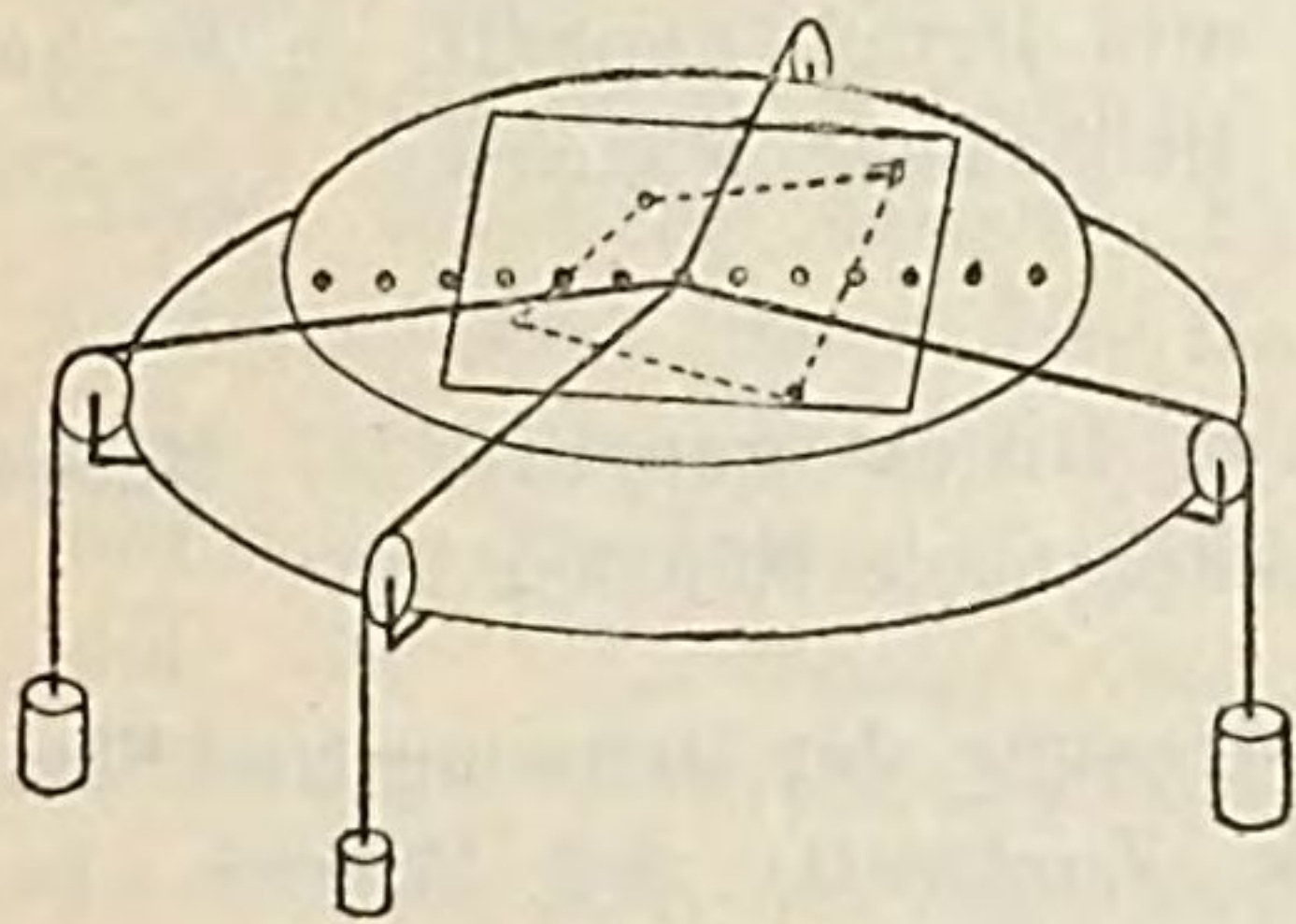


Fig. 3.

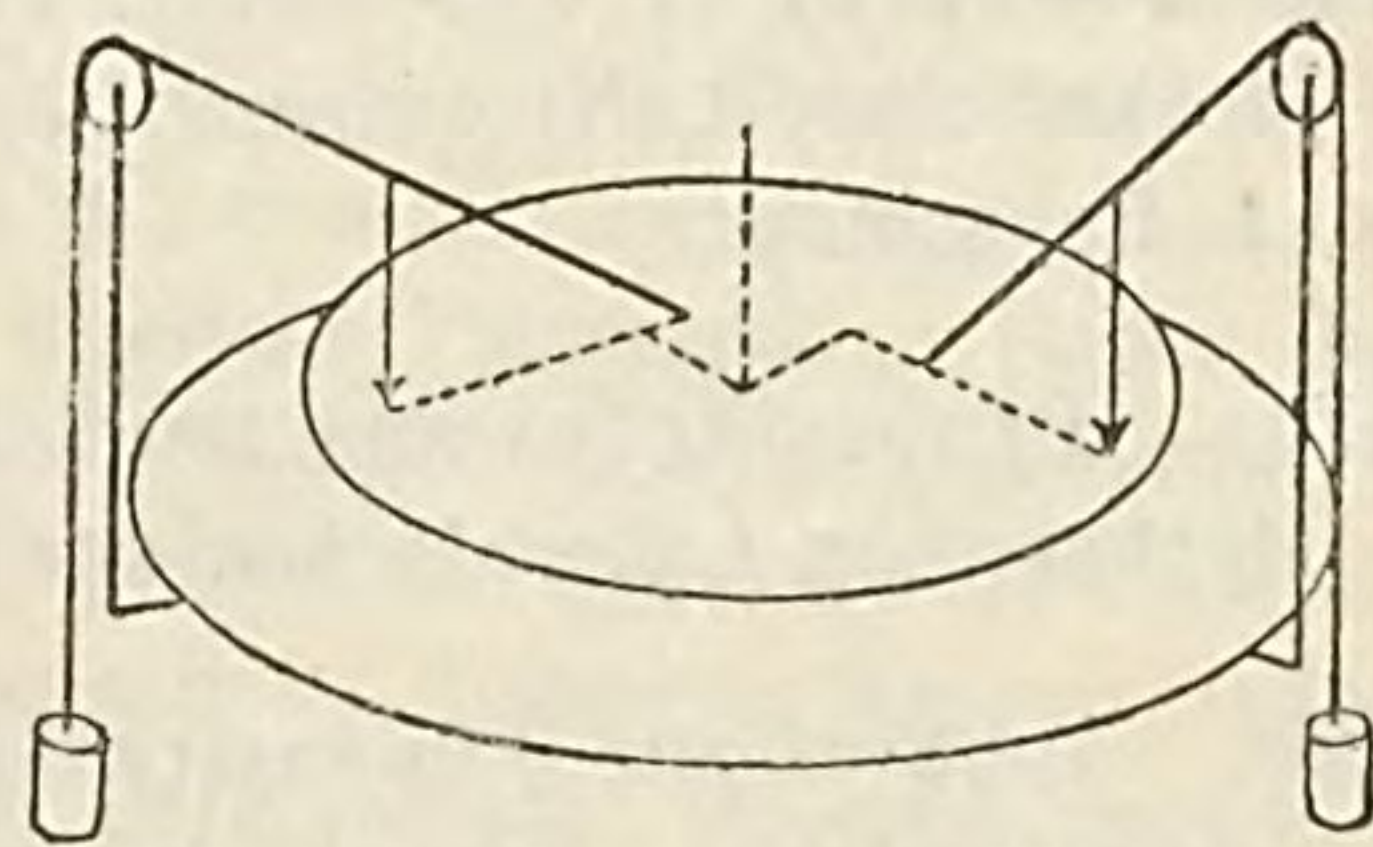


Fig. 4.

Von den der Statik angehörenden Demonstrationen mit zwangsläufiger Kreisscheibe sei zuerst erwähnt die des Gleichgewichts beliebig im Raume gelegener Kräfte, die an einem um eine feste Axe drehbaren Körper angreifen (allgemeines Hebelgesetz; Fig. 4.), sodann die des Gleichgewichts zweier Kräfte an einem nur in einer festen Richtung verschieblichen Körper (schiefe Ebene), endlich die der charakteristischen Eigenschaft des Momentancentrums der Bewegung, falls zwei Punkten der Kreisscheibe bestimmte, nicht parallele Bahnen vorgeschrieben sind.

Der Apparat erlaubt endlich auch mehrfach Bewegungserscheinungen eines starren Körpers zu veranschaulichen, so z. B. die reine Progressivbewegung desselben beim Angriffe einer Kraft im Schwerpunkte, die mit einer Drehung gepaarte Verschiebung desselben bei excentrischem Angriffe

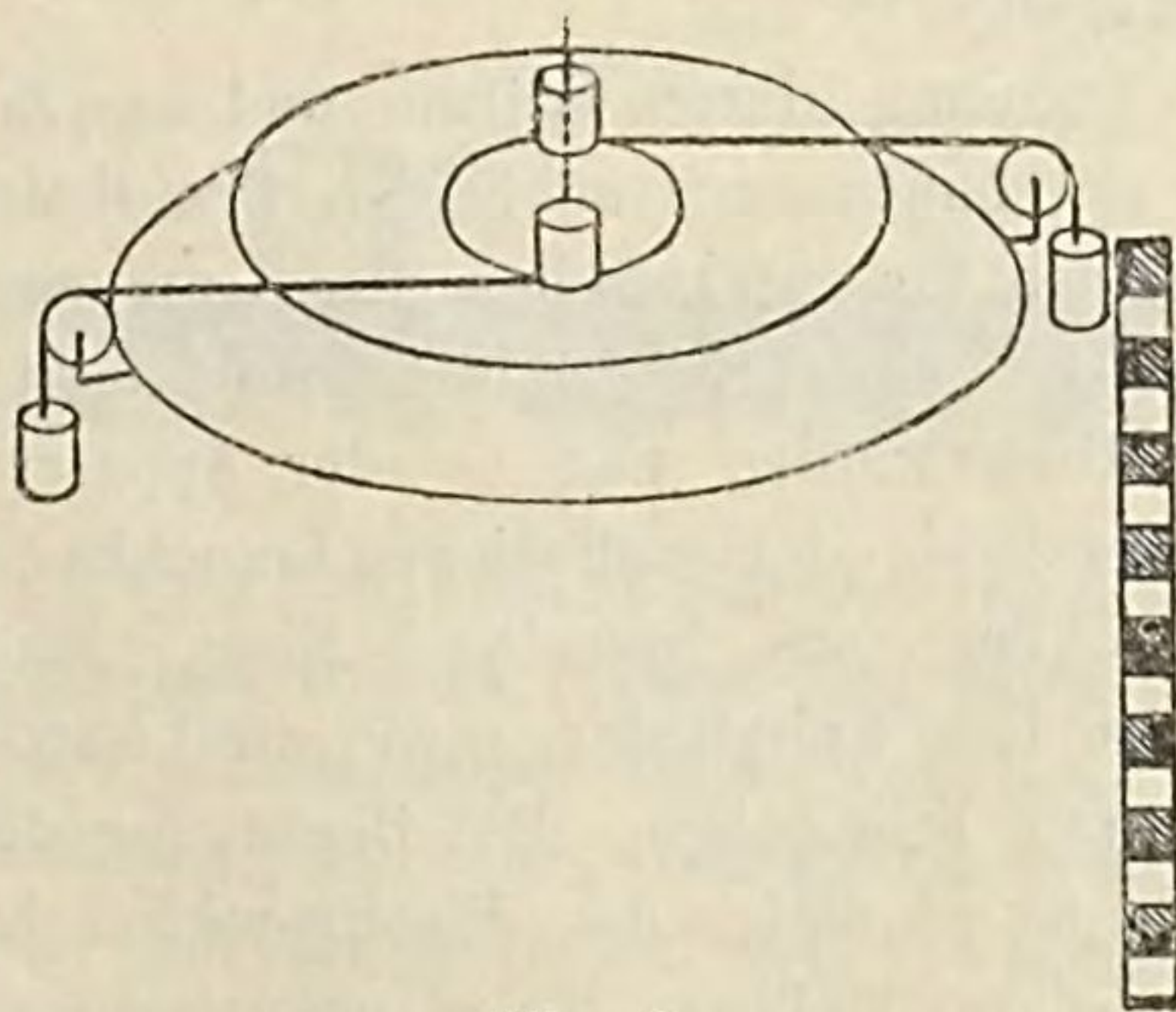


Fig. 5.

derselben, die blosse Drehung um den Schwerpunkt des Körpers durch ein Kräftepaar. Ferner dient der Apparat zur Demonstration der gleichförmig beschleunigten Drehbewegung (Analogie der Fallmaschine; Fig. 5), sowie zu der der schwingenden Drehbewegung (horizontal schwingendes physisches Pendel) und zur Bestätigung der hier geltenden Gesetze unter mannigfacher Variation der Experimente. Vermittelst der Nebenapparate lässt sich auch das Gesetz von der Erhaltung der Flächen, wie das von der Erhaltung des Schwerpunktes bequem demonstrieren.

(J. Freyberg.)

240c. Apparat zum Nachweis der Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften und der Demonstration der Gesetze der Drehung, von Prof. **Töpler**, vereinfacht v. **P. Szymanski**. Construiert und ausgestellt von Mechaniker **A. Herbst**. Berlin.

242a. Probestücke aus Stahl, auf Zug und Druck geprüft im Mechanisch-technischen Laboratorium der techn. Hochschule München. Vorstand Prof. **J. Bauschinger**.

242aa. Probestücke aus Sandstein, auf Druck geprüft im Mechanisch-technischen Laboratorium der techn. Hochschule München.

242b. Apparat zur Demonstration und Messung der Dehnung und Elasticität verschiedener Drähte durch Druck (Zugkraft) und Wärme aus dem mechanischen Institut von **Dr. Stöhrer und Sohn**.

Der Apparat besteht aus einem meterlangen Stativ, an welchem Drähte verschiedenster Länge und Stärke festgespannt werden können. An der Säule des Statives ist ein Gradbogen mit Zeiger befestigt. Ueber eine Scheibe der leicht beweglichen Zeigerwelle läuft ein Faden, der mittelst einer Klemme am untern Ende des gespannten Drahtes befestigt wird. Unten ist der Draht mit einer angebogenen Oese in dem Hacken eines geteilten Holzhebels befestigt. Durch Gewichtsverschiebung kann die Hebelwirkung beliebig verändert werden.

Jede geringste Dehnung des eingespannten Drahtes wird durch die Zeigerbewegung deutlich sichtbar, und lässt sich damit die Bestimmung des Elasticitätscoefficienten, sowie der Versuch über das Dehnungsvermögen klar ausführen. (Es zeigt z. B. Zinkdraht äusserst geringe Elasticität, aber grosses Dehnungsvermögen.)

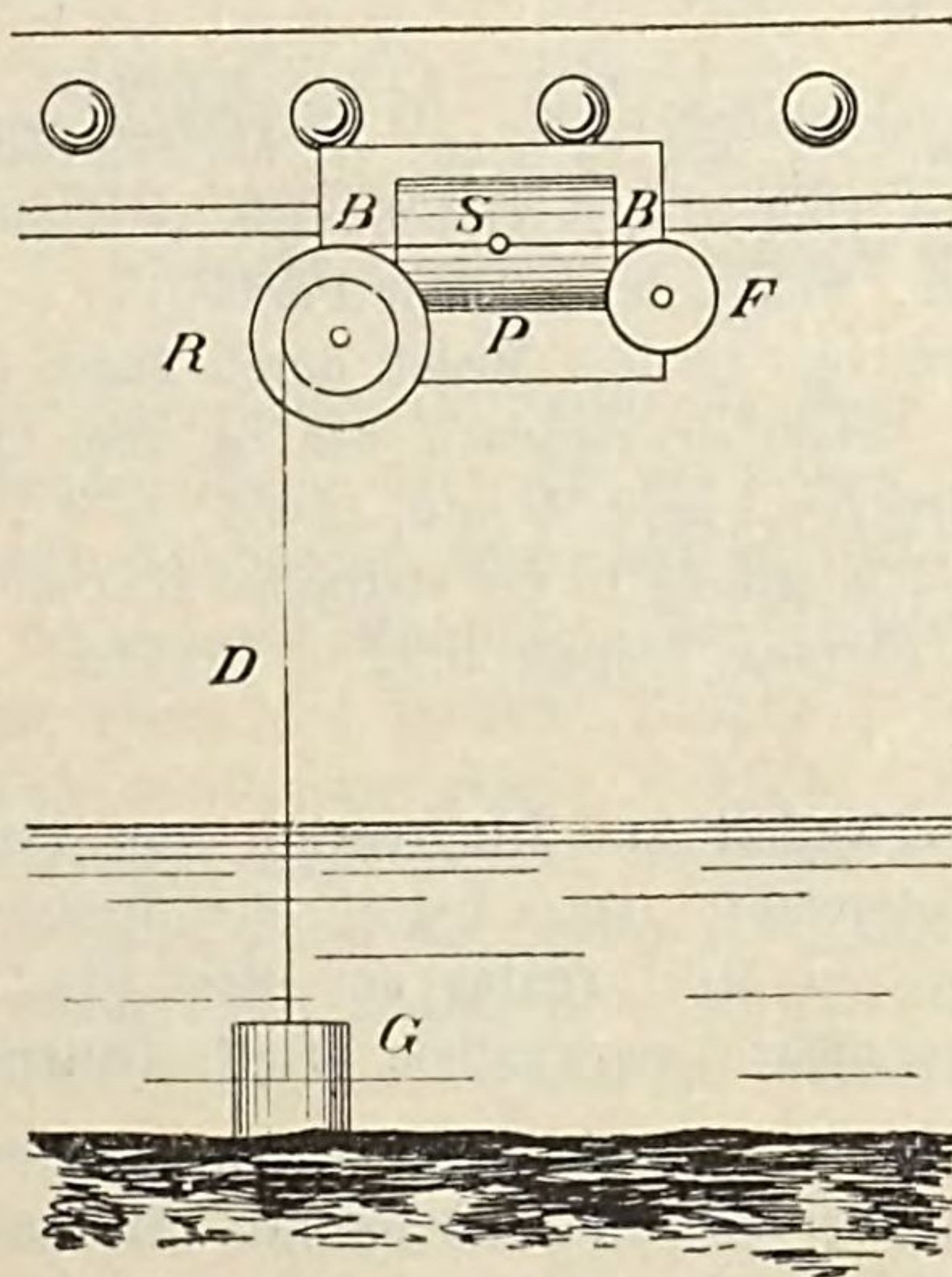
Um die Dehnung durch Wärme und das Zusammenziehen beim Erkalten zeigen zu können, sind an beiden Draalthaltern (siehe Bild: a und b) Zuleitungsklemmen für galvanischen Strom angebracht. Je nach dem Leitungsvermögen der einzelnen Drähte wird die Ausdehnung durch Zeigerablenkung sichtbar werden und so der Apparat recht gut auch zu galvanischen Widerstands-Demonstrationen brauchbar sein. 4 Drähte je 0,5 mm stark und gleichlang aus Neusilber, Eisen, Kupfer, Zink und eine aus Stahldraht gewundene Spiralfeder, sowie zwei Gewichte, $\frac{1}{2}$ und 1 kg schwer, sind dem Apparate beigegeben. Bei Benutzung dünner Drähte von starker Dehnung (Zink) ist es nötig, das Eigengewicht des Holzhebels durch die am hintern Hebelarm stellbare Kugel nahezu auszugleichen.

242c. Dehnungszeichner von Prof. **Fränkel**, technische Hochschule Dresden, ausgeführt im mechanischen Institut von **O. Leuner in Dresden**; aus der **Sammlung für Ingenieurwissenschaften der technischen Hochschule zu München**.

242d. Durchbiegungszeichner von Prof. **Fränkel**, technische Hochschule Dresden, ausgeführt und ausgestellt vom **mechanischen Institut von O. Leuner in Dresden**.

Die beiden Apparate bezwecken in Dehnungs- bezüglich Durchbiegungsdiagrammen das ganze Veränderungsgesetz der Inanspruchnahme eines Constructionsteiles für eine beliebig veränderliche Belastung während einer beliebig kurzen oder langen Zeit der Art zu veranschaulichen, dass die Abscissen den Zeiten und die Ordinaten den stark vergrößerten Längenänderungen entsprechen.

Beim **Dehnungszeichner** werden zunächst mittels zweier Doppelklammern die Endpunkte der zu messenden Länge festgelegt. Die eine Klammer fixirt den einen Endpunkt eines parallel zu dem zu untersuchenden Constructionsteile liegenden Stabes, welcher an der Dehnung nicht teil nimmt; die andere Klammer bildet den Rahmen für den eigentlichen Dehnungszeichner, eine mittels Uhrwerk drehbare Papierrolle. Ueber diese Rolle bewegt sich ein Schreibstift, dessen Stellung durch die Aenderung der Entfernung der beiden Doppelklammern mit Hilfe einer von dem zweiten Ende des vorerwähnten Stabes ausgehenden Hebelübertragung regulirt wird. Das Uebersetzungsverhältnis der Dehnung des Objectes gegenüber der Verschiebung des Schreibstiftes beträgt etwa 1 : 175.



Der **Durchbiegungszeichner** soll die Durchbiegung einer im Betriebe befindlichen eisernen Brücke messen und dabei die Schwierigkeit der Schaffung eines hiezu erforderlichen festen Punktes aufheben. Als fester Punkt dient ein etwa 15 kg schweres Gewicht **G**, welches an einem Drahte **D** senkrecht unter der Versuchsstelle auf den Flussgrund zu liegen kommt. Das Princip des Durchbiegungszeichners beruht nun darin, die Aufhebung

der Spannung des von diesem Gewichte G ausgehenden und über eine Stufenscheibe R gespannten Drahtes bei der Durchbiegung zur Regulirung des Schreibapparates zu verwenden. Zu dem Zwecke verbindet ein Stahlband B die Stufenscheibe R mit einer Federtrommel F . Die im Innern dieser Trommel befindliche Feder spannt mit constanter Kraft das Stahlband B , welches also beim Nachlassen der Spannung des Drahtes D in der Richtung von R nach F geführt wird. An dem Stahlband B ist ein Schreibstift S befestigt, welcher diese Verschiebung auf eine während des Versuches zu drehende Papierrolle P aufzeichnet.

Für die nähere Beschreibung beider Apparate vergleiche man noch die den Apparaten beigegebenen Figurentafeln, sowie die Aufsätze im Civilingenieur, Band 27 und 33. (Dyck.)

242e. Modell zur räumlichen Darstellung des Einflusswertes der Biegemomente eines belasteten Balkens von **Ludwig Freytag**, Ingenieur bei der obersten Baubehörde in München.

An einem an zwei Stellen gestützten homogenen elastischen Stab von der Länge l hängt eine Last in der Entfernung z von einem Stützpunkt des Stabes. Die Biegemomente der links und rechts von einem Querschnitt in der Entfernung x von einem Stützpunkt angreifenden Kräfte sind dann folgenden Ausdrücken proportional:

$$\begin{array}{l|l} v_R = \psi \cdot \xi & \psi + \xi \leq 1 \\ v_L = \psi \cdot \xi - (\psi + \xi - 1) & \psi + \xi \geq 1 \end{array}$$

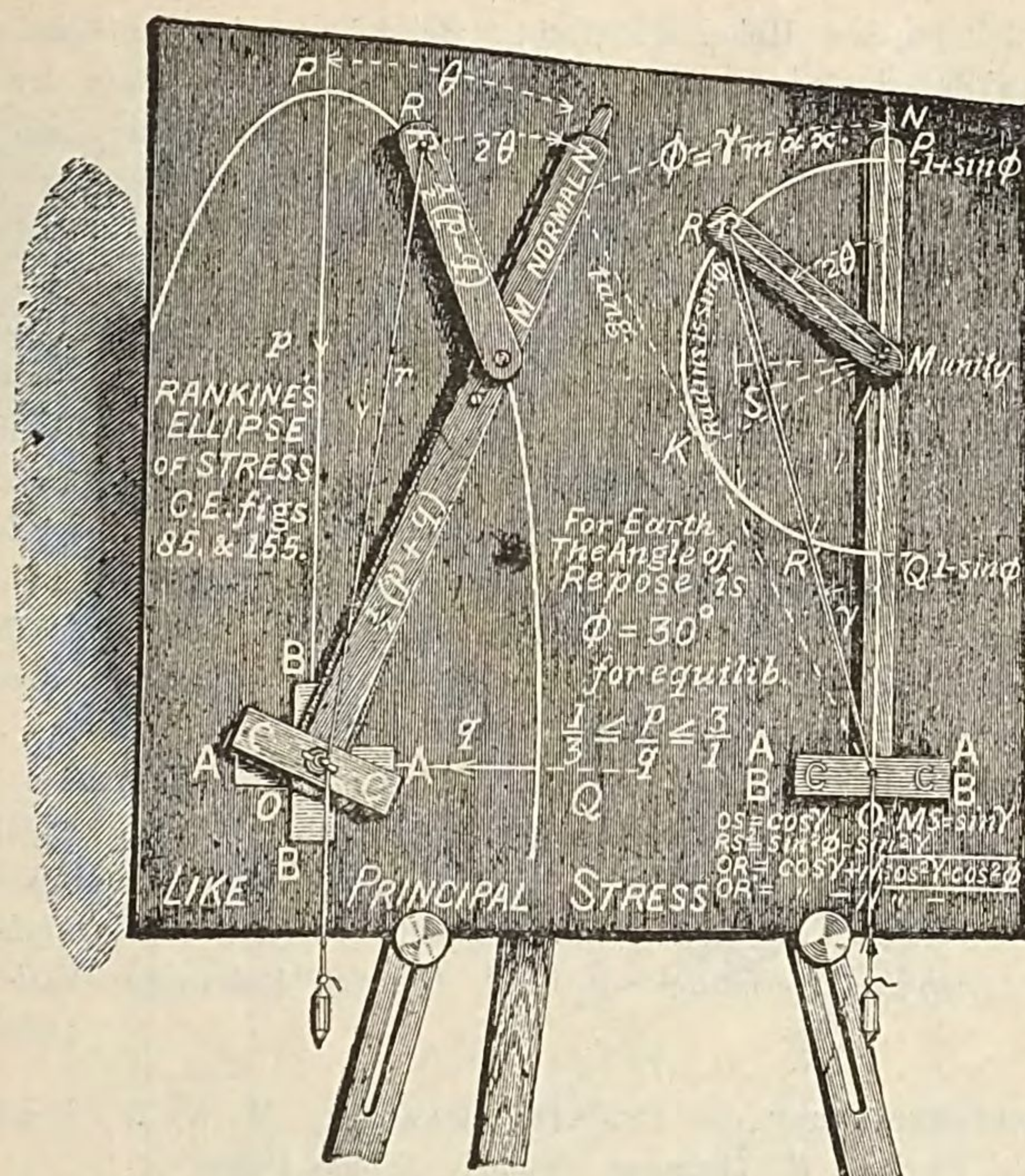
Hiebei ist $x = \xi \cdot l$ und $l - z = \psi \cdot l$ gesetzt.

Trägt man ξ , ψ und v_R bzw. v_L als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes auf, so stellen obige Gleichungen zwei gleichseitige hyperbolische Paraboloiden dar, welche längs einer Parabel in der Ebene $\xi + \psi = 1$ aneinandergrenzen und in dem Modell durch Fäden (Erzeugende) ersichtlich gemacht sind, soweit sie zwischen den bei dem Problem nur in Betracht kommenden Grenzen $\xi = 0$, $\psi = 0$, $\xi = 1$, $\psi = 1$ verlaufen. Vergleiche die Schrift: Vereinfachung in der statischen Bestimmung elastischer Balkenträger von *L. Freytag*, Leipzig 1892 b. *Teubner*.

(Finsterwalder)

244a Kinematisches Modell zur Illustration von Rankine's Methode der Druckellipse, ausgeführt nach Angabe von Professor **Alexander**, Trinity College, Dublin, von Mrs. **Yeates** and **Son** Grostonst. Dublin. Aus der Sammlung für Ingenieurwissenschaften. **Trinity College, Dublin**.

Vorstehende Figur stellt das ausgestellte Modell dar. Die Reisschiene ON links ist an der Tafel in O befestigt. MR ist ein Hebel, der in M mit der Reisschiene verbunden ist. Im Punkt M ist auf der Rückseite der Schiene eine Rolle befestigt und um die Rolle geht eine Kette ohne Ende, die ausserdem um eine in O befestigte Rolle läuft. Die Rolle in O hat einen doppelt so grossen Durchmesser als die in M . Wenn daher die Reisschiene rechts herumgedreht wird, so dreht sich der Hebel RM von selbst nach links, so dass der $\angle RMN$ immer gleich 2ϑ ist, wo $\angle PON$ gleich ϑ ist; oder mit anderen Worten die Halbierungslinie



von RMN ist immer parallel zu OP . Eine Schnur ist an dem Hebel in R befestigt, sie geht durch einen Ring in O und wird durch ein Gewicht gespannt gehalten. Es ist leicht einzusehen, dass der Punkt R eine Ellipse beschreibt.

Der Kopf der Reisschiene CC stellt die Spur irgend einer durch $O \perp$ zur Tafel gehenden Ebene dar und der Vector der Ellipse, welcher durch das Stück RO der Schnur dargestellt ist, gibt den Druck auf die Ebene CC nach Grösse und Richtung. Der $\angle PON = \theta$ gibt die Lage der Ebene CC zur Ebene des grössten Hauptdruckes AA an, während $RON = \gamma$ die Schiefe des Druckes gegen CC angibt. Das Modell zeigt klar die ausgezeichneten Lagen der Ebene CC . So kann CC gedreht werden, bis sie mit AA zusammenfällt, wobei die Schnur $RO \perp CC$ wird und ein Maximum der Länge erhält; fällt andererseits CC mit BB zusammen, so ist die Schnur RO wieder $\perp CC$, hat dagegen ein Minimum der Länge; wenn aber CC so gelegt wird, dass der $\angle RMO$ ein rechter wird, so wird die Komponente von $RO \parallel CC$ ein Maximum und schliesslich, wenn es gedreht wird, bis $\angle MRO$ ein Rechter wird, dann wird ROM , die Schiefe der Schnur, ein Maximum. Die Hilfsfigur zur Rechten des Diagrammes bezieht sich auf die Lösung des allgemeinen Problems des ebenen Druckes in einem Punkte, d. h.: Ist der Druck nach Grösse und Richtung für zwei Lagen von CC gegeben, so ist der Druck für irgend eine 3. Lage von CC zu finden. Bei der Hilfsfigur sind die Reisschienen in allen Lagen von CC übereinander gelagert zu denken und durch eine Reisschiene ersetzt, welche an der Tafel befestigt ist und

wobei sich nur der Hebel MR dreht. Bei Lösung des Problems der Stabilität von Erdarbeiten werden gewisse lineare Dimensionen in der Hilfsfigur durch das bekannte Gewicht eines Erdprismas dargestellt, während eine andere Dimension den verlängerten Druck auf die Stützmauer oder ein Fundament darstellt. Im allgemeinen sind also 2 Winkelgrößen bekannt, wie z. B. $\text{KON} = \varphi$, der Maximalwert von γ , nämlich der Reibungswinkel der lockeren Erdmasse, während $\text{RON} = \gamma$ die bekannte Neigung der beiden Oberflächen ist. An der anderen Seite der Tafel ist eine zweite Reisschiene um denselben Punkt O befestigt, wobei der einzige Unterschied der ist, dass OM kürzer ist als der Hebel MR. Diese Anordnung bezieht sich auf den Fall eines uneigentlichen Hauptdruckes und dient dazu, die Zusammensetzung verschiedener Drucke zu zeigen, wie z. B. beim Zerdrücken und Biegen einer Säule oder beim Biegen und Drehen einer Spiralfeder. Mit Hilfe der Nuten an der Staffelei kann die Tafel so gestellt werden, dass jeder beliebige Vector der Ellipse vertical steht.

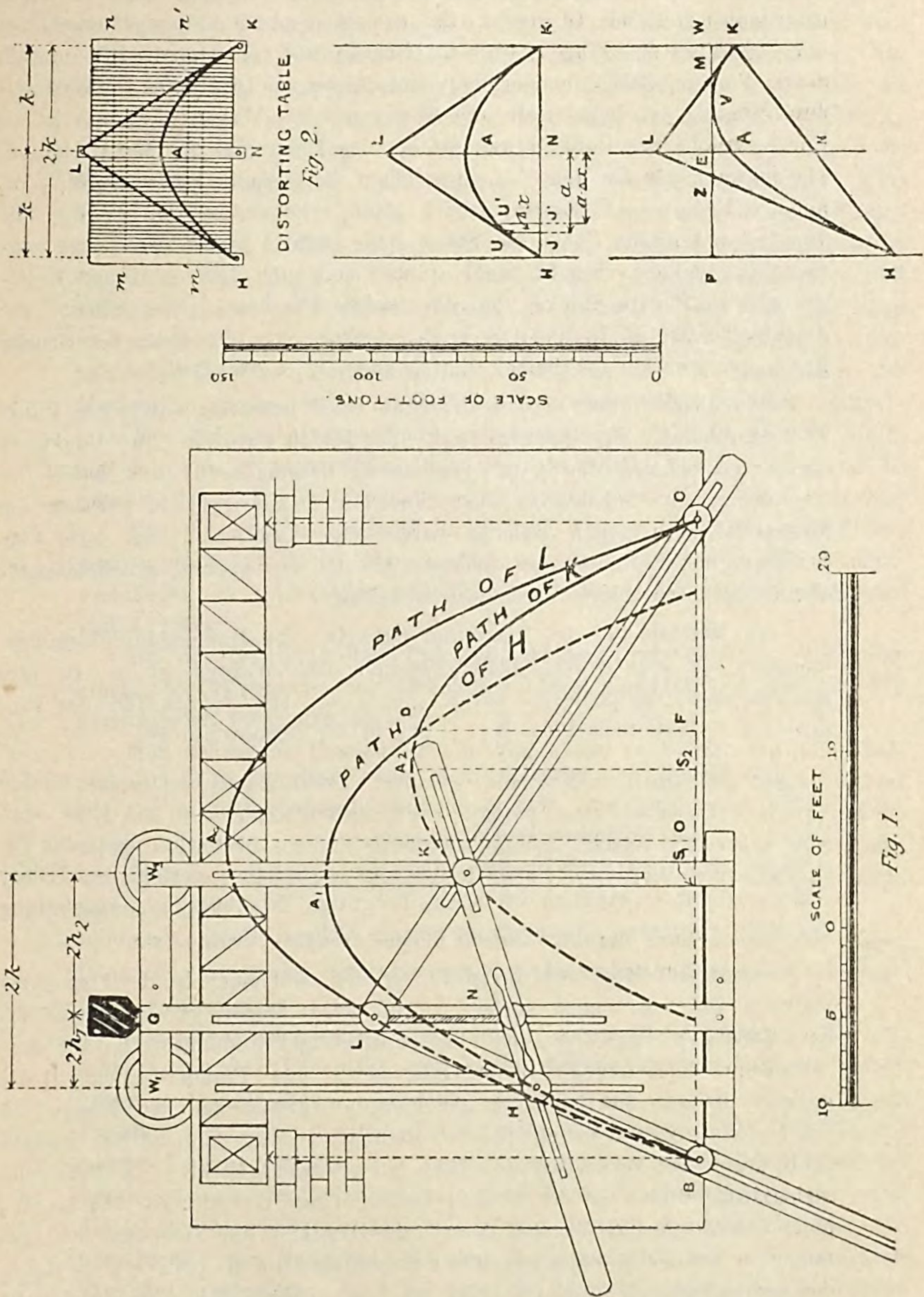
Das Modell war im Jahre 1891 in der K. Jrischen Akademie ausgestellt und ist in der „Transactions“ zuerst beschrieben. Man vergleiche auch Rankine's „Civil Engineering“, „Applied Mechanics“, Williamson's „Treatise on Stress“. Für numerische Beispiele vergleiche Alexander's „Elementary Applied Mechanics“ 1. Theil, Howe's „Retaining Walls“.

(Alexander.)

244b. Momentenzeichner von Prof. Th. Alexander, M. A. J., Trinity-College Dublin und Prof. A. M. Thomson, Science College Poona.

Das Modell dient zur Veranschaulichung der Bieugungsmomente, welche auf einen Balken ausgeübt werden, beim Darüberlaufen eines Rades oder einer Locomotive. Das Modell besteht aus einem Brett (Fig. 1), auf welches ein rechteckiger Balken (Brückenträger), der auf beiden Enden aufliegt, gemalt ist. Ein mit einer Nute versehener Rahmen lässt sich vorne über die Tafel bewegen mit Hilfe zweier Räder W_1, W_2 , welche auf der oberen Kante der Tafel wie auf einer Schiene laufen. Sie stellen die Räder eines auf dem Balken bewegten Wagens dar; der Schwerpunkt der Belastung ist in G; W_1 und W_2 sind die auf die Räder fallenden Teile der Gesamtlast $G = W_1 + W_2$. LHB und LKC sind zwei Stäbe, (wie die Arme eines Zirkels), zwischen welchen sich quer der Stab HNK befindet. LN ist ein Stab von bestimmter Länge, welcher den Masstab des Diagrammes fixirt; die Spannweite des Balkens (der Brücke) ist BC. In B und C sind Bolzen angebracht, in welchen die mit einem Schlitz versehenen Stäbe LHB und LKC gleiten. Die in H und K angebrachten Bolzen laufen durch drei mit Schlitz versehenen Stäbe, während die in L und N angebrachten und der Stab LN in dem mittleren senkrechten Stab durch G gleiten.

Steht der Wagen in irgend einer Lage, wie in Fig. 1, so misst das kleine Dreieck HLK seinem Flächeninhalte nach das Bieugungsmoment der Brücke mit Bezug auf die Spannweite der Räder von W_1 nach W_2 . Das grosse Dreieck BLC ist, bezogen auf denselben Masstab, das Diagramm der Bieugungsmomente der Brücke für die Belastung $W_1 + W_2$, sofern sie direkt auf die Brücke ausgeübt wird. Nimmt man zur Einfachheit an,



dass der Wagen kein Eigengewicht hat, so erhält man das Diagramm des wirklichen Biegemomentes in dem Polygon BH KC für die specielle Lage der Belastung. Bewegt man nun das Stabwerk so, dass der Wagen in eine andere Lage kommt, so kann sich der Masstab für das kleine Dreieck wegen des unveränderlichen verticalen Zwischenstückes NL nicht än-

dern und ebensowenig der für das Polygon BHKC; dieses letztere repräsentiert also stets das Diagramm für das momentane Bieugungsmoment bei der Bewegung des Wagens über die Brücke und die Gerade HK umhüllt dieses Polygon BHKC und ergibt infolgedessen das Diagramm der Maximaldurchbiegung der Brücke für die Bewegung des Wagens. Ebenso ist die Curve, welche der Punkt L beschreibt, das Diagramm der Maximaldurchbiegungsmomente für den Fall, in welchen die gesamte Belastung $W_1 + W_2$ auf den Rädern in G konzentriert ist. Man erkennt nun leicht, dass die von L beschriebene Curve ein Stück einer Parabel bildet, deren Axe vertical liegt und die über BC steht, ebenso sind auch die von H und K beschriebenen Punkte Stücke von congruenten Parabeln, deren Scheitel um die Strecke $OS_1 = h_1$ und $OS_2 = h_2$ seitlich von der Mitte der Brücke liegen und zwar in der halben Entfernung GW_1 bzw. GW_2 .

Man übersieht ferner, dass der Stab HNK beständig durch den Punkt D hindurchläuft, in welchem sich die beiden Parabeln der Punkte H und K schneiden. Man kann von diesem Umstande für das Modell Gebrauch machen, indem man einen Bolzen in D anbringt, in welchem der Balken HNK zu gleiten genötigt wird. Man kann dann das feste Verbindungsstück LN entbehren, indessen arbeitet der Apparat gleichmässiger, wenn man diese beiden Verbindungen belässt.

Der Masstab für das Diagramm BHA_1DC der Maximaldurchbiegungsmomente in der Brücke beim Passiren des Wagens ist so zu construiren, dass OA_0 gemessen auf A gleich ist dem vierten Teil des Productes der Gesamtbelastung $W_1 + W_2$ in der Spannweite BC.

Das Modell ist natürlich nicht dazu bestimmt, den Ort der Punkte wirklich aufzuzeichnen, was ja mit einer Parabelschablone aus Holz oder Carton auf die einfachste Weise geschehen kann; vielmehr dient das Instrument den Unterrichtszwecken und wird von uns sowohl im Trinity College, Dublin (welchem wir auch die gütige Erlaubnis zur Ausstellung desselben verdanken), als auch im Science College, Poona, verwendet.

Das Modell führt zwei Beispiele vor. Bei dem einen ist die Last symmetrisch auf den Wagen verteilt. Auf dieses Modell ist eine verschiebbare Stabreihe, (Fig. 2) in den Punkten H, L und K aufzusetzen; auf denselben sind die Geraden HL und KL, sowie das Parabelsegment HAK gemalt. Ist nun die Belastung gleichförmig verteilt auf den Wagen von W_1 bis W_2 statt im Mittelpunkt G vereinigt zu sein, dann ist das Dreieck HLK durch das Parabelsegment HAK zu ersetzen; ist aber die Belastung gleichförmig direkt auf der Brücke verteilt längs der Strecke W_1 bis W_2 ohne Vermittlung des Wagens, dann ist das Diagramm der Momentanbiegungsmomente bei der Bewegung dieser Belastung über die Brücke stets durch die gerade Linie BH und CK und den sie verbindenden Parabelabschnitt HK auf der Stabreihe dargestellt; dieser Parabelabschnitt verändert sich dabei während der Bewegung des Apparates so, dass die Gerade BH und CK stets Tangenten desselben bleiben. Es ist dabei das Parabelsegment immer Bogen ein und derselben Parabel. — Die Stabreihe (Fig. 2) ist hergestellt mit Hilfe einer Reihe von senkrechten Stäben in geringer Entfernung von einander und durch eine Nürnberger Schere verbunden.

Die analoge Darstellung der Bieugungsmomente unter der Voraussetzung von mehreren Rädern lässt sich nur wegen ihrer Complicationen nicht ausführen. Man hat für einen solchen Fall mit einer Parabelschablone nur die der Radzahl entsprechenden Parabeln aufzuzeichnen, wobei man die Schablonen bei verticaler Axe stets so legt, dass sie durch die Punkte S_1 , S_2 u. s. w., die der Lage des Schwerpunktes der Belastung gegen die Radstellung entsprechen, hindurchgehen. Man erkennt dann leicht, dass die Schnittpunkte D_1 , D_2 u. s. f. dieser Parabelbogen auf die ganze Spannweite BC projecirt, diese in Segmente abtheilen, welche den Belastungen für die Räder W_1 , W_2 u. s. f. proportional sind. So bezieht sich jedes Rad auf ein Segment der Brücke, welches zur gesamten Spannweite derselben in demselben Verhältniss steht, wie das Gewicht der Radbelastung zur Gesamtbelastung. Zur Herstellung des Masstabes für das Diagramm der Maximalbieugungsmomente ist jetzt nur noch notwendig, mit der Parabelschablone ein Parabelsegment über der Spannweite als Basis zu construiren, und die Scala so festzusetzen, dass die Scheitelhöhe der Parabel gleich ist dem vierten Theile des Productes der Gesamtbelastung in die Spannweite.

Für die analytische Darstellung und weitere Ausführung vergleiche man unseren Aufsatz im „Engineering vom Januar 1879“, weiter die Entwicklungen in „Alexander und Thomson's Elementary applied Mechanics Teil 2, 1883.“

Um den Gebrauch einer Parabelschablone zu vermeiden, sei noch eine graphische Construction mit Zirkel und Lineal angeführt, welche auf den vorstehenden Principien beruht:

Man nehme die Parabelbogen in Fig. 1 und denke sich ein neues Diagramm gezeichnet, dessen verticale Dimensionen überall die Quadratwurzel aus den in der Figur betrachteten betragen, dann werden alle Parabeln gleichzeitig in Halbellipsen mit gemeinschaftlicher Excentricität übergehen und, wenn man sie mit einem geeigneten Factor versieht, in Halbkreise. Man hat also die:

Aufgabe: Gegeben ist ein Balken (Brücke), über welche ein Wagen fährt. Man construire das Diagramm der Quadratwurzeln aus den Maximalbieugungsmomenten.

Graphische Lösung: Man theile die Spannweite in so viele Abschnitte, als man Räder hat und mache dieselben proportional den Belastungen auf diese Räder. Hierauf errichtet man Senkrechte in diesen Punkten. Der Verteilung der Räder gegen den Schwerpunkt des Wagens entsprechend, verteilen sich dann auch die Centra von Kreisen auf der Spannweite, die immer zwischen je zwei Verticale einzuzeichnen sind. Damit ist der bezeichnete Ort gefunden und handelt es sich noch um die Construction des Masstabes. Zu dem Ende errichtet man einen Halbkreis über der Spannweite; es misst dann die Höhe des Halbkreises (die halbe Spannweite) die Quadratwurzeln aus dem vierten Theile des Productes der Belastung in die Spannweite.

Wir freuen uns in Gegenwärtigem diese elegante Lösung einer complicirten practischen Aufgabe zum ersten Male vorzulegen.

(Th. Alexander, A. W. Thomson.)

244c Darstellung des zeitlichen Verlaufes von Stoss und Rückschlag eines Holzparallelepipeds auf einen Kautschukcylinder. Nach Angabe von Prof. **Tait**, Universität Edinburgh.

Auf einen in Blei fest eingebetteten Cylinder aus Kork, Kautschuk etc. stösst ein Parallelepiped aus hartem Holz, welches man in einer Führung, wie sie beim Block einer Guillotine angewendet wird, herabfallen lässt und welches vom Cylinder einigemal reflectirt wird, bis seine lebendige Kraft verzehrt ist.

Das Parallelepiped trägt einen Schreibstift von Stahl, welcher durch eine Uhrfeder an eine rasch rotirende achteckige, mit feuchter Buchdruckerschwärze bestrichene Spiegel-Glastafel angedrückt wird und auf derselben eine Curve zeichnet, welche, sobald die lebendige Kraft des Parallelepipeds aufgezehrt ist, in einen Kreis übergeht. Die kleinen Hervorragungen der Curve über diesen Kreis, welche in einer der Tafeln mit den Zahlen I bis XII bezeichnet sind, lassen den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeitsänderung des Parallelepipeds erkennen. Auf die Glastafel verzeichnet ausserdem — zur Controlle der Gleichmässigkeit der Rotation derselben sowie zur absoluten Zeitmessung — eine Stimmgabel von genau bekannter Schwingungsdauer eine Wellencurve.

Diese Zeichnungen wurden mittelst Lichtpauseverfahrens auf photographisches Papier übertragen.

(Vergl. hiez u die Abhandlung von *Tait* „*On Impact*“ *Transactions of Royal Society of Edinburgh*. Vol. 36. part. I, 1891, pg. 225.)

(L. Boltzmann.)

S. Kinematische Modelle.

245a. Polcurven für zwei gegenüberliegende Seiten eines Gelenkvierecks. Kinematische Sammlung der technischen Hochschule München.

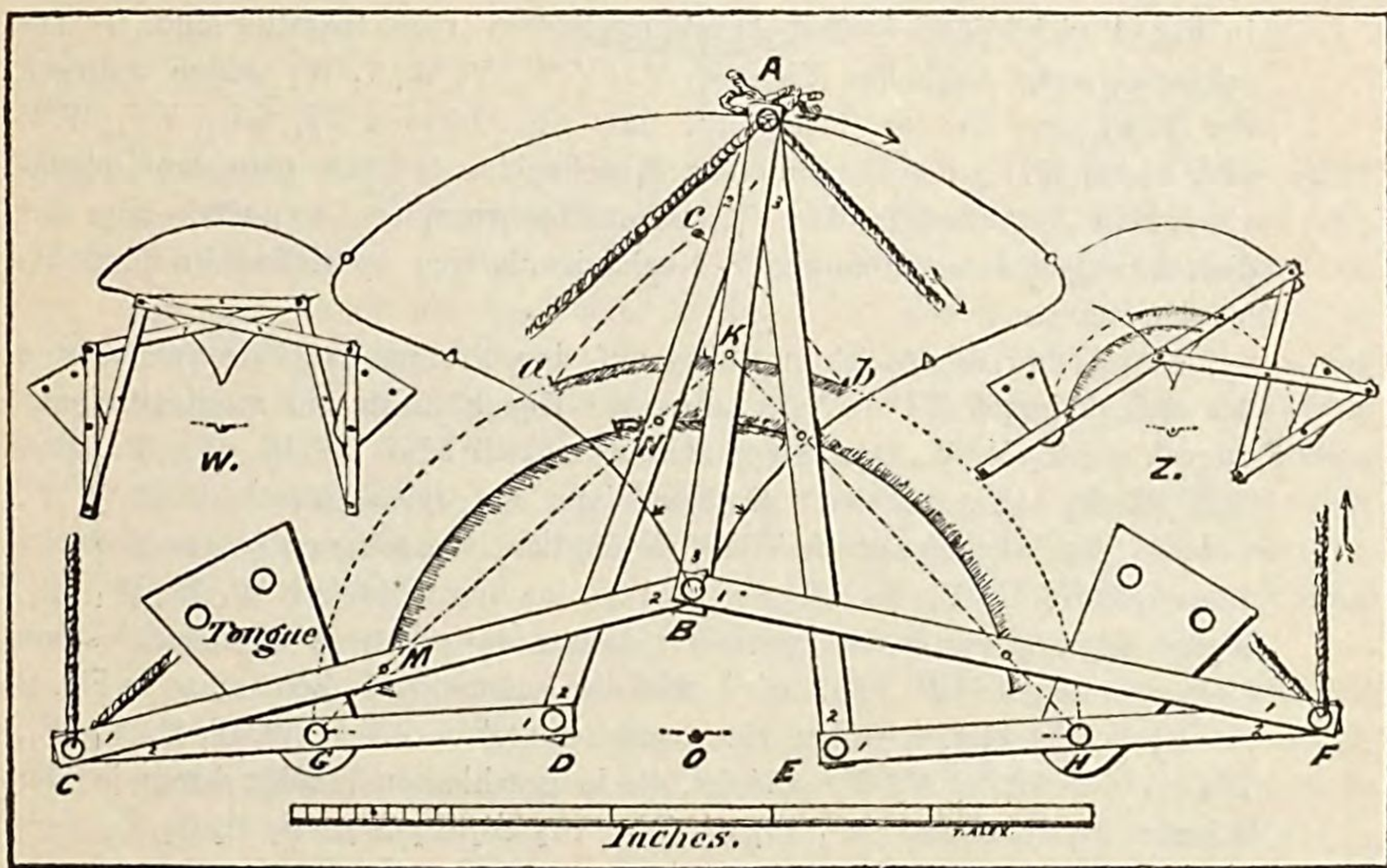
Das Modell stellt die Curven 8. Ordnung der instantanen Drehungscentra für die durch ein Gelenkviereck vermittelte Bewegung dar, und zwar in der festen mit dem einen Stab verbundenen Ebene und in der beweglichen mit dem gegenüberliegenden Stabe verbundenen. Der Mechanismus zeigt das Abrollen beider Polcurven aufeinander.

250a. Zusatz. (Mechanismus, bei welchem eine Wechsellage den Uebergang zwischen einem zwangsläufigen und einem nicht zwangsläufigen Mechanismus vermittelt. Von Prof. Rodenberg, Hannover.)

Hat man, ausgehend von der gekennzeichneten Wechsellage, durch Bewegung eine solche Lage abgeleitet, in der sich die drei Teilketten wie ebenso viele starre Systeme verhalten müssen, so können diese, wie leicht zu sehen, mittelst eines neuen Gelenkes zu einem zwangsläufigen Mechanismus (Gelenkviereck) verbunden werden. Daraus kann man schliessen, dass sich unter den vorhandenen und im allgemeinen zur Erzielung von Zwangsläufigkeit schon hinreichenden Gelenken mindestens zwei solche befinden, von denen das eine das andere überflüssig macht, d. h. von denen man daher auch eins beseitigen kann, ohne die Starrheit der drei Glieder aufzuheben. In der That, liegen die drei Punkte 56, 34 und die Vereinigung von 35 und

46 nicht in gerader Linie, so verhalten sich schon die unter 2) und 3) genannten Teilketten ohne Zuthun der übrigen Glieder wie starre Systeme, und infolge der Deckung von 13 und 24 sind σ_1 und σ_2 auch dann noch starr mit einander verbunden, wenn man eine Gelenkaxe der Koppel herausnimmt, wie es beim Modell geschehen kann. Ebenso wirkungslos wäre eine Beseitigung eines der Gelenke des Gestelles, oder eines der Gelenke 13 und 24 gewesen. (Rodenberg.)

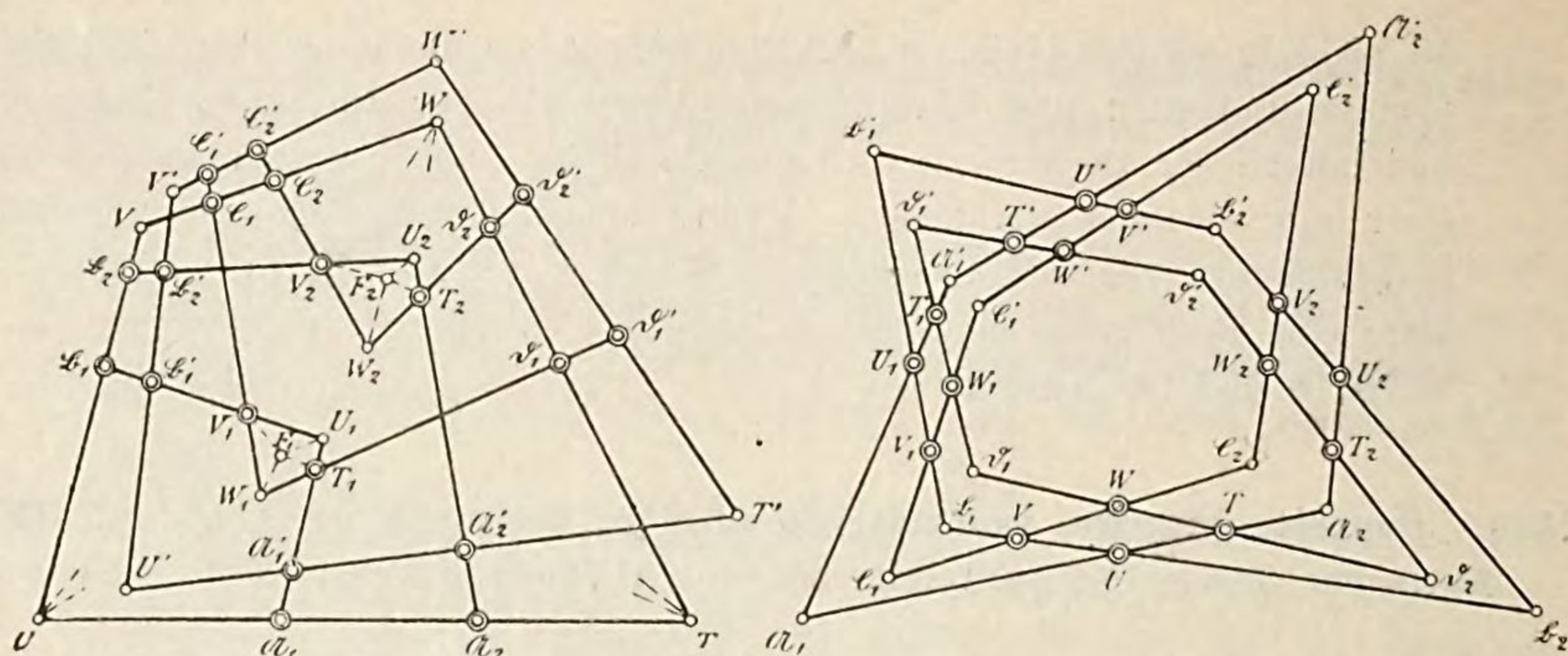
251a. Doppeltgekreuzte kinematische Kette, nach Angabe von Prof. Th. Alexander, Trinity College, Dublin und Prof. A. Thomson, Science College Poona.



Die Verbindung, für welche die von den einzelnen Punkten beschriebenen Wege aufgezeichnet sind, wird angewandt zur Bewegung der Steuer-
ruder; sie gestattet verschiedene Winkelbeschleunigungen herzustellen.

252a. Allgemeiner Brennpunkt-Mechanismus (Vierungsmechanismus) Modell Nr. 7 aus Aluminium von Prof. L. Burmester (angefertigt im math.-physik. Institut von Th. Edelmann, München). Kinematische Sammlung der Technischen Hochschule in München.

Nach Nr. 232 des Hauptkataloges ist bei einem Brennpunkt-Mechanismus in Fig. 1 ein Brennpunkt F_1 eines das Gelenkviereck $TUVW$ berührenden Kegelschnitts durch vier Glieder gelenkig mit den vier Seiten des Gelenkvierecks verbunden. Dieser Brennpunkt-Mechanismus wird verallgemeinert, indem man an das Gelenkviereck $TUVW$ ein demselben entgegengesetzt ähnliches Gelenkviereck $T_1U_1V_1W_1$ in den Punkten $\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 \mathcal{C}_1 \mathcal{D}_1$ anschliesst, dessen Ecken resp. auf den Geraden F_1T, F_1U, F_1V, F_1W liegen und dessen Seiten den zum Brennpunkt F_1 gehörenden



in Fig. 1 nicht gezeichneten Anschlussgliedern resp. parallel sind. *) Die entgegengesetzt ähnlichen Vierecke $TUVW$, $V_1W_1T_1W_1$ stehen während der Bewegung in der Beziehung, dass die Geraden TT_1 , UU_1 , VV_1 , WW_1 sich beständig in dem Brennpunkt F_1 schneiden. Lässt man das Gelenkviereck in dem Brennpunkte F_1 zusammenschrumpfen, so erhält man aus diesem allgemeinen Brennpunkt-Mechanismus den speciellen Brennpunkt-Mechanismus.

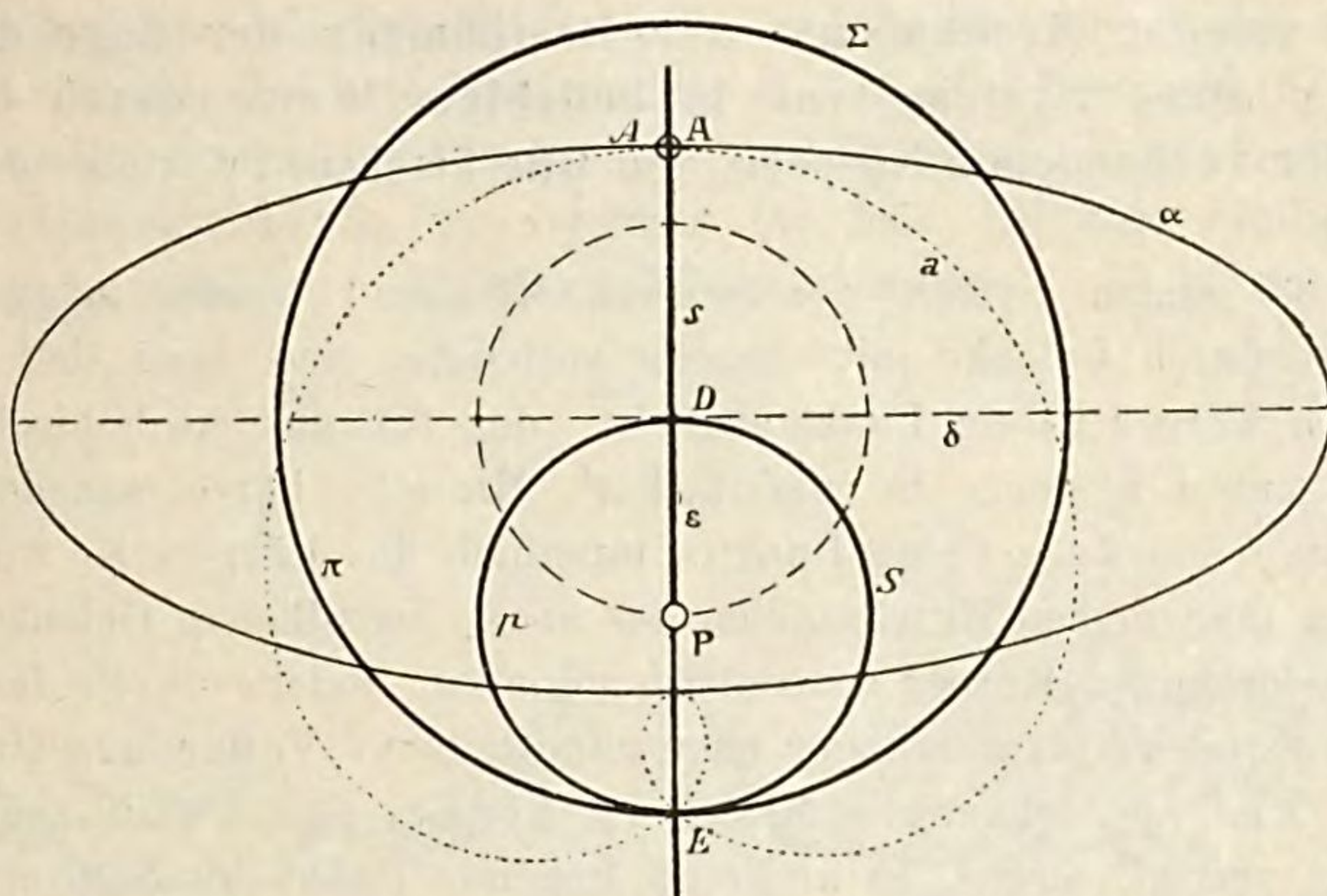
In gleicher Weise ist in Bezug auf den Brennpunkt F_2 eines anderen das Gelenkviereck $TUVW$ berührenden Kegelschnitts ein zweites Gelenkviereck $T_2U_2V_2W_2$ an das Gelenkviereck $TUVW$ in den Punkten $\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2\mathcal{D}_2$ angeschlossen. Es kann dann ein Gelenkviereck $T'U'V'W'$, welches dem Gelenkviereck $TUVW$ ähnlich ist, mit den beiden Gelenkvierecken $T_1U_1V_1W_1$, $T_2U_2V_2W_2$ in den Punkten $\mathcal{A}'_1\mathcal{B}'_1\mathcal{C}'_1\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{A}'_2\mathcal{B}'_2\mathcal{C}'_2\mathcal{D}'_2$ verbunden werden. Dieser so erhaltene übergeschlossene Mechanismus *Modell Nr. 7* wird, wie die schematische Zeichnung in Fig. 2 anschaulicher zeigt, aus den vier Gelenkvierecken $TUVW$, $T_1U_1V_1W_1$, $T'U'V'W'$, $T_2U_2V_2W_2$ gebildet, die in geschlossener Folge durch je vier Gelenke $\mathcal{A}_1\mathcal{B}_1\mathcal{C}_1\mathcal{D}_1$, $\mathcal{A}'_1\mathcal{B}'_1\mathcal{C}'_1\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{A}'_2\mathcal{B}'_2\mathcal{C}'_2\mathcal{D}'_2$, $\mathcal{A}_2\mathcal{B}_2\mathcal{C}_2\mathcal{D}_2$ verbunden sind. Dieser Mechanismus kann so in viererlei Weisen als aus vier in geschlossener Folge verbundenen Gelenkvierecken bestehend aufgefasst werden, und heisst deshalb Vierungsmechanismus. Aus demselben gehen die *Modelle Nr. 4 und 5* Hauptkatalog S. 334 und sehr viele andere specielle übergeschlossene Mechanismen hervor. (L. Burmester.)

254a. Rädermechanismus zur Veranschaulichung des Chasles'schen Princips der Umkehrung der Bewegung von Prof. L. Burmester (angefertigt von Max Ott in München). **Kinematische Sammlung der Technischen Hochschule in München.**

Vollzieht ein ebenes System S in einem anderen ebenen System Σ eine bestimmte Bewegung und sind $A, \mathbf{A}$ zwei in einer Lage coincidirende Punkte, welche resp. dem System S, Σ angehören, dann beschreibt der Punkt A im System Σ eine Curve α und der Punkt $\mathbf{A}$ im System S eine Curve a . Je zwei solche Curven α, a entsprechen sich in den Systemen Σ, S .

Wird z. B. das System Σ als fest betrachtet, dann erzeugt der Punkt A des bewegten Systems S die Curve α in dem festen System Σ . Wird diese

*) L. Burmester, die Brennpunkt-Mechanismen. Zeitschrift für Math. und Phys. 1893. S. 193.



Bewegung umgekehrt, also das System S als fest angenommen, dann erzeugt der Punkt **A** des bewegten System Σ die Curve a im festen System S. *) Um die Curven α , a gleichzeitig zu B. durch einen Rädermechanismus zu erzeugen, wird bei demselben in Fig. 1 die Bewegung des Systems S in dem als fest betrachteten System Σ durch Rollen eines Kreises p des Systems S in einem doppelt so grossen Kreis π des festen System Σ bewirkt. Dieses Rollen wird durch den Eingriff eines Zahnrades p in ein hohles Zahnrad π erzeugt; und die Bewegung des Zahnrades p wird durch eine Kurbel hervorgebracht, auf deren Welle ein Zahnrad befestigt ist. Dasselbe greift in ein Zahnrad, welches in dem Körper des Hohlrades concentrisch ringförmig gelagert ist und die rotirende Axe P des Rades p trägt.

An dem Rade p ist ein Stab s befestigt, auf dem ein feststellbarer Schreibstift **A** sich befindet. Dieser Schreibstift beschreibt auf einer festen matten Glastafel eine Ellipse α und zwei an diesem Stabe befestigte Stifte D , E , die auf dem Kreise p diametral liegen, beschreiben zwei rechtwinkelige Durchmesser δ , ε des Kreises π . Andererseits ist an dem Rade p eine matte Glastafel befestigt, auf der ein am Gestell feststellbarer Schreibstift **A** gleichzeitig eine allgemeine Cardioide (*Pascal'sche Curve*) a beschreibt.

(L. Burmester.)

260a. Kinematische Modelle. Ausgeführt und ausgestellt vom **Polytechnischen Arbeitsinstitut J. Schröder, Darmstadt.**

Tafelmodelle für die Bildung der Radlinien und zwar : (359) Epicycloide, (360) Hypocycloide, (361) Evolvente, (363) Cycloiden-Verzahnung, (365) Epicycloiden-Verzahnung, (365) Hypocycloiden-Verzahnung, (366) Evolventen-Verzahnung, (367 u. 368) Triebstock-Verzahnung, (368¹ u. 368²) Gradflanken-Verzahnung, (368³) Doppelte Punkt-Verzahnung, (368⁴) Gemischte Verzahnung, (368⁵) Innere Evolventen-Verzahnung, (368⁶ u. 368⁷) Evolventen-Verzahnung, (369¹) Allgemeine Verzahnung, (369²) Schraube ohne Ende.

Für die nähere Beschreibung und Abbildungen der einzelnen Modelle sei auf den illustrierten Katalog der Firma verwiesen.

*) *Chasles*, Geschichte der Geometrie, deutsch von *Sohncke*. 1839. S. 447.

264a. Ein zweiter Mechanismus zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes eines Systems von in beliebiger Weise durch Gelenke mit einander verbundenen Körpern, von **Otto Fischer**, Privatdocent, Universität Leipzig.

Bei einem System von starren Körpern, welche in ganz beliebiger Weise durch Gelenke mit einander verbunden sind, lässt sich in jedem einzelnen Körper K_i ein Punkt angeben, der für das mechanische Verhalten des ganzen Systems in mehrfacher Hinsicht hervorragende Bedeutung besitzt. Die Lage dieses Punktes innerhalb des Körpers K_i wird gefunden, indem man in den Mittelpunkten der an K_i befindlichen Gelenke die Massen aller derjenigen Körper concentrirt annimmt, welche durch das betreffende Gelenk mit K_i in mittelbarer oder unmittelbarer Verbindung stehen. Denkt man noch ausserdem die Masse des Körpers K_i selbst in seinen Schwerpunkt verlegt, so ist der in Frage stehende Punkt der Schwerpunkt dieser sämtlichen Massenpunkte. Da derselbe in die Mechanik bisher noch nicht eingeführt war, so habe ich für diesen Punkt den Namen „Hauptpunkt des Körpers K_i “ und für die Strecken zwischen dem Hauptpunkt und den Mittelpunkten der an K_i befindlichen Gelenke die Bezeichnung „Hauptstrecken des Körpers K_i “ vorgeschlagen*). Der Hauptpunkt ist ein Ausdruck für die Lage des Körpers K_i innerhalb des Systems; er verliert seine Bedeutung, wenn man den Körper K_i isolirt, von dem Systeme losgelöst betrachtet.

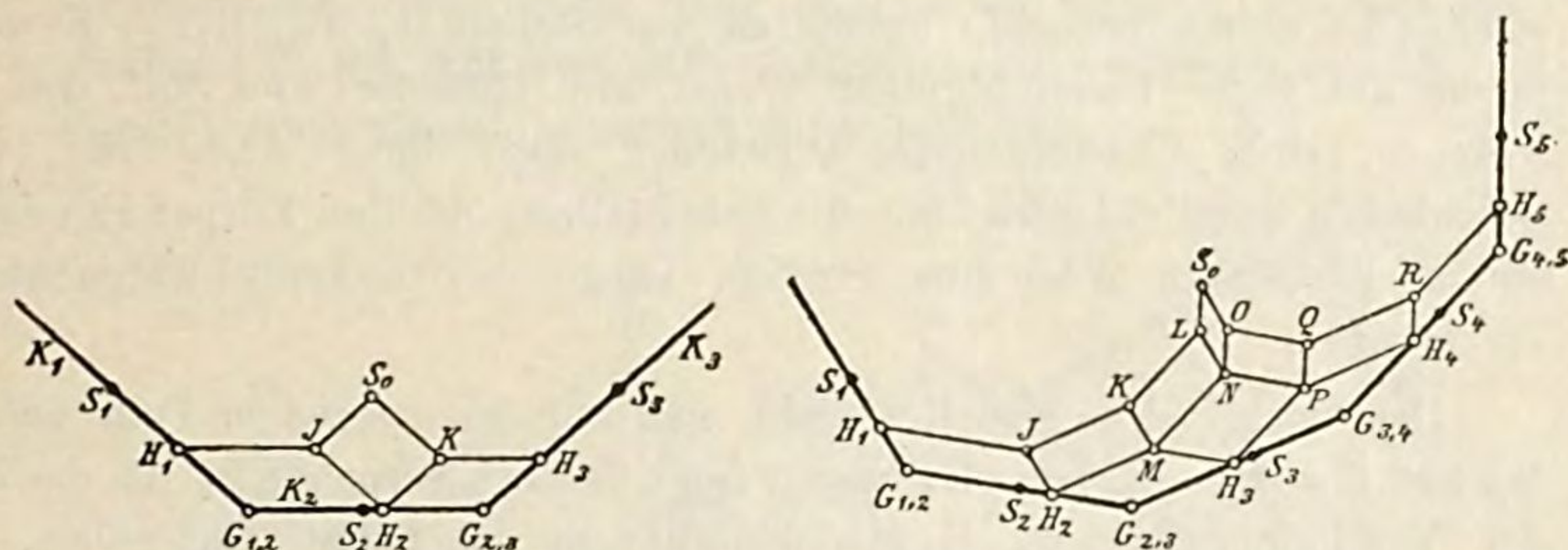
Der menschliche Körper stellt mit grosser Annäherung ein derartiges System von starren Körpern dar. Um in demselben beispielsweise den Hauptpunkt des rechten Oberschenkels zu bestimmen, hätte man im Mittelpunkte des rechten Hüftgelenks die Massen des Rumpfs, Kopfes, des ganzen linken Beins und der beiden Arme, im Mittelpunkte des rechten Kniegelenks dagegen nur die Massen des rechten Unterschenkels und rechten Fusses, und endlich im Schwerpunkte des Oberschenkels die Masse des rechten Oberschenkels selbst vereinigt zu denken. Der Schwerpunkt dieser drei Massenpunkte ist dann der gesuchte Hauptpunkt des rechten Oberschenkels. Die Gesamtmasse dieses fingierten Systems dreier Massenpunkte ist, wie man leicht einsieht, gleich der Gesamtmasse des ganzen menschlichen Körpers.

Die Hauptpunkte ermöglichen nun unter Anderem eine sehr einfache Construction der Lage des Gesamtschwerpunktes des ganzen Körpersystems. Man hat zu dem Zwecke nur von dem Hauptpunkte H_i irgend eines Körpers K_i des Systems aus die geometrische Summe derjenigen, zu allen übrigen Körpern des Systems gehörigen Hauptstrecken zu bilden, welche innerhalb des Systems dem Hauptpunkte H_i zugekehrt sind.

Hätte man es z. B. mit einem System von drei hintereinander durch Gelenke verbundenen Körpern K_1, K_2, K_3 zu thun, bei welchem $G_{1,2}$ (Figur 1) den Mittelpunkt des Gelenkes zwischen K_1 und K_2 , und $G_{2,3}$ den des Ge-

*) Vgl. meine Habilitationsschrift: „Die Arbeit der Muskeln und die lebendige Kraft des menschlichen Körpers.“ Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Band XX Nr. 1 pag. 22, pag. 60 und ff. In dieser Schrift sind alle hier angeführten Eigenschaften der Hauptpunkte ausführlich abgeleitet und bewiesen worden.

lenkes zwischen K_2 und K_3 darstellt, und hätte man in der angegebenen Weise den Ort der drei Hauptpunkte H_1, H_2, H_3 bestimmt (S_1, S_2, S_3 bedeuten die Einzelschwerpunkte der drei Körper), so würde sich der Gesamtschwerpunkt S_0 des Systems für jede beliebige Stellung der drei Körper zu einander in folgender Weise ergeben.



Entweder bildet man von H_1 aus die geometrische Summe $[H_1 J] + [J S_0]$, wo $[H_1 J] = [G_{1,2} H_2]$ und $[J S_0] = [G_{2,3} H_3]$, oder man bildet von H_2 aus die geometrische Summe $[H_2 J] + [J S_0]$, wo $[H_2 J] = [G_{1,2} H_1]$ und $[J S_0] = [G_{2,3} H_3]$, oder endlich man bildet von H_3 aus die geometrische Summe $[H_3 K] + [K S_0]$, wo $[H_3 K] = [G_{2,3} H_2]$ und $[K S_0] = [G_{1,2} H_1]$, und kommt jedesmal auf denselben Punkt S_0 . Dieser ist der Schwerpunkt des Systems der drei Körper.

Die Reihenfolge der einzelnen Strecken ist natürlich gleichgültig. So könnte man z. B. von H_2 aus auch die geometrische Summe $[H_2 K] + [K S_0]$ bilden, wo $[H_2 K] = [G_{2,3} H_3]$ und $[K S_0] = [G_{1,2} H_1]$ ist, und würde zu demselben Punkte S_0 gelangen.

Hierbei ist durchaus nicht vorausgesetzt, dass die drei Körper durch Charnirgelenke mit parallelen oder windschiefen Axen verbunden sind. Die Punkte $G_{1,2}$ und $G_{2,3}$ können ebenso gut als Mittelpunkte von Kugelgelenken aufgefasst werden. Es ist ferner auch durchaus nicht etwa erforderlich, dass der Schwerpunkt S_2 und der Hauptpunkt H_2 in der Verbindungslinie der beiden Gelenkmittelpunkte liegen.

In ganz entsprechender Weise gestaltet sich die Construction des Gesamtschwerpunktes für ein complicirteres System von Körpern, bei dem nicht nur mehr als drei Glieder vorhanden sind, sondern bei dem auch einige Körper mit mehr als zwei anderen durch Gelenke in Verbindung stehen, wie es z. B. beim menschlichen oder tierischen Körper vorkommt. Zerlegt man den menschlichen Körper in 12 oder in 14 Abschnitte, (vgl. den Haupt-Katalog vom Jahre 1892 Nr. 262) so kommt die Construction des Gesamtschwerpunktes für jede beliebige Haltung des Körpers auf die Bildung der geometrischen Summe von 11 oder von 13 Strecken hinaus. (Genaueres hierüber sehe man in der oben citirten Habilitationsschrift nach).*)

Dieses Resultat kann man für die Construction eines Schwerpunkts-

*) Man vergleiche hiezu auch die Apparate von J. Kleiber, Hauptkatalog pap. 320.

mechanismus verwenden, welcher von dem in Nr. 262 des Katalogs beschriebenen vollständig verschieden ist.

Sind insbesondere die drei Körper in Figur 1 durch zwei Charnirgelenke mit parallelen Axen verbunden, so erkennt man leicht, dass man nur an Stelle der Strecken $\overline{H_1J}$, $\overline{JH_2}$, $\overline{H_2K}$, $\overline{KH_3}$, $\overline{JS_0}$, und $\overline{S_0K}$ Cartonstreifen zu setzen braucht, welche an den Stellen H_1 , H_2 , H_3 , J , K und S_0 in der aus Figur 1 ersichtlichen Weise mit einander und mit den drei Körpern durch Charnirgelenke verbunden sind, deren Axen den beiden Gelenkaxen parallel laufen, um für jede Stellung der drei Körper zu einander auf mechanischem Wege die richtige Länge des Gesamtschwerpunktes S_0 zu erhalten.

Das ausgestellte Modell bezieht sich auf den speciellen Fall, dass die Massen der drei Körper gleich sind und der Schwerpunkt S_2 in die Mitte der Verbindungslinie $G_{1,2} G_{2,3}$ hineinfällt; es ist leicht einzusehen, dass dann der Hauptpunkt H_2 sich mit dem Schwerpunkte S_2 deckt, was sonst im Allgemeinen keineswegs der Fall ist.

Gleichzeitig versinnlicht Figur 2 einen ganz entsprechenden (ebenfalls ausgestellten) Mechanismus für 5 hinter einander durch Charnirgelenke mit parallelen Axen verbundenen Körper. Das ausgestellte Modell bezieht sich wieder auf den speciellen Fall, dass die Massen aller 5 Körper gleich sind, und dass die Schwerpunkte S_2 , S_3 und S_4 bezüglich in die Mitten der Verbindungslinien $\overline{G_{1,2} G_{2,3}}$, $\overline{G_{2,3} G_{3,4}}$ und $\overline{G_{3,4} G_{3,5}}$ hineinfallen; daher fällt auch in diesem Modell der Hauptpunkt H_3 mit dem Schwerpunkte S_3 zusammen. Nach dem oben Gesagten ist ohne Weiteres ersichtlich, dass die Längen der einzelnen Cartonstreifen folgenden Bedingungen genügen müssen:

$$\begin{aligned}\overline{JH_2} &= \overline{KM} = \overline{LN} = \overline{S_0O} = \overline{H_1G_{1,2}}; \overline{H_1J} = \overline{G_{1,2}H_2}; \\ \overline{MH_3} &= \overline{NP} = \overline{OQ} = \overline{H_2G_{2,3}}; \overline{H_2M} = \overline{JK} = \overline{G_{2,3}H_3}; \\ \overline{PH_4} &= \overline{QR} = \overline{H_3G_{3,4}}; \overline{H_3P} = \overline{MN} = \overline{KL} = \overline{G_{3,4}H_4}; \\ \overline{RH_5} &= \overline{H_4G_{4,5}} \text{ und } \overline{H_4R} = \overline{PQ} = \overline{NO} = \overline{LS_0} = \overline{G_{4,5}H_5};\end{aligned}$$

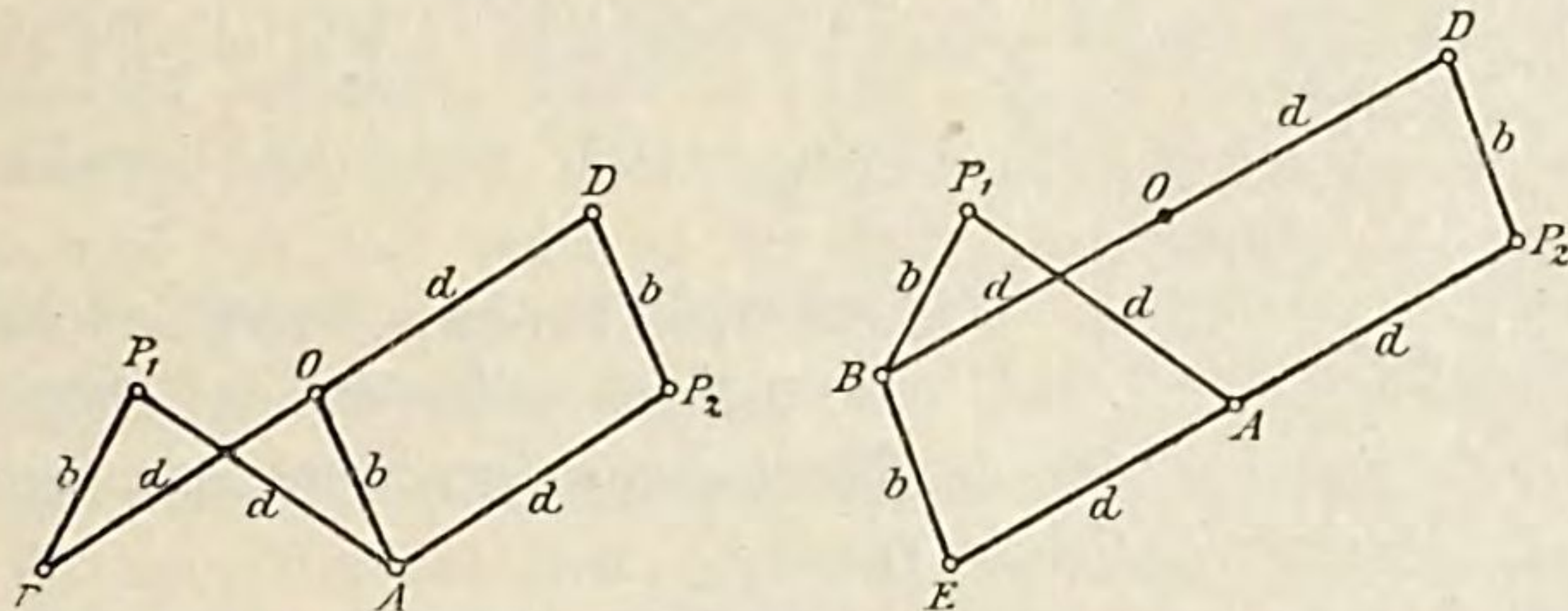
dann wird für jede beliebige Stellung der 5 Körper zu einander S_0 den Ort des Gesamtschwerpunktes angeben.

Infolge der grossen Anzahl der Glieder, und noch mehr infolge des Umstandes, dass für die Endkörper die Hauptpunkte ziemlich nahe an die Gelenke heranrücken, lässt sich dieser Mechanismus nur schwer bewegen. Derselbe dürfte daher mehr theoretisches als practisches Interesse beanspruchen. Im Falle einer grösseren Anzahl von Abschnitten, wie z. B. beim menschlichen Körper, ist der früher angegebene Schwerpunktsmechanismus (Haupt-Katalog 1892 Nr. 262) jedenfalls einem nach dem soeben erörterten Princip construirten Mechanismus vorzuziehen; denn jener functionirt sehr leicht.

Für den Fall nur zweier Körper gehen beide Arten von Schwerpunktsmechanismen in einander über. (Otto Fischer.)

264b. Einige Gelenkmechanismen von **Otto Fischer**, Privatdocent an der Universität Leipzig.

Ein Teil des unter Nr. 264 des Kataloges vom Jahre 1892 beschriebenen Mechanismus zur Bestimmung von Trägheitsmomenten verwirklicht die Transformation durch reciproke Radien. Es ist dies der Mechanismus, welcher noch übrig bleibt, wenn man in der Figur zu Nr. 264 die Cartonstreifen $\overline{CF}$, $\overline{FE}$, $\overline{EM}$ und $\overline{MF}$ fortlässt, und welcher in der folgenden Figur 1 noch einmal gesondert dargestellt ist.



Derselbe besteht aus 6 durch Charnirgelenke mit einander verbundenen Cartonstreifen $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1B}$, $\overline{BOD}$, $\overline{DP_2}$, $\overline{P_2A}$ und $\overline{AO}$, von denen $\overline{BP_1} = \overline{AO} = \overline{DP_2} = b$; $\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = d$ und $\overline{BOD} = 2d$, und zwar so, dass $\overline{BO} = \overline{OD} = d$ ist.

Es lässt sich leicht einsehen, dass die drei Punkte O , P_1 und P_2 immer in gerader Linie liegen (vgl. Nr. 264 des Kataloges von 1892), und dass

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = \text{const.},$$

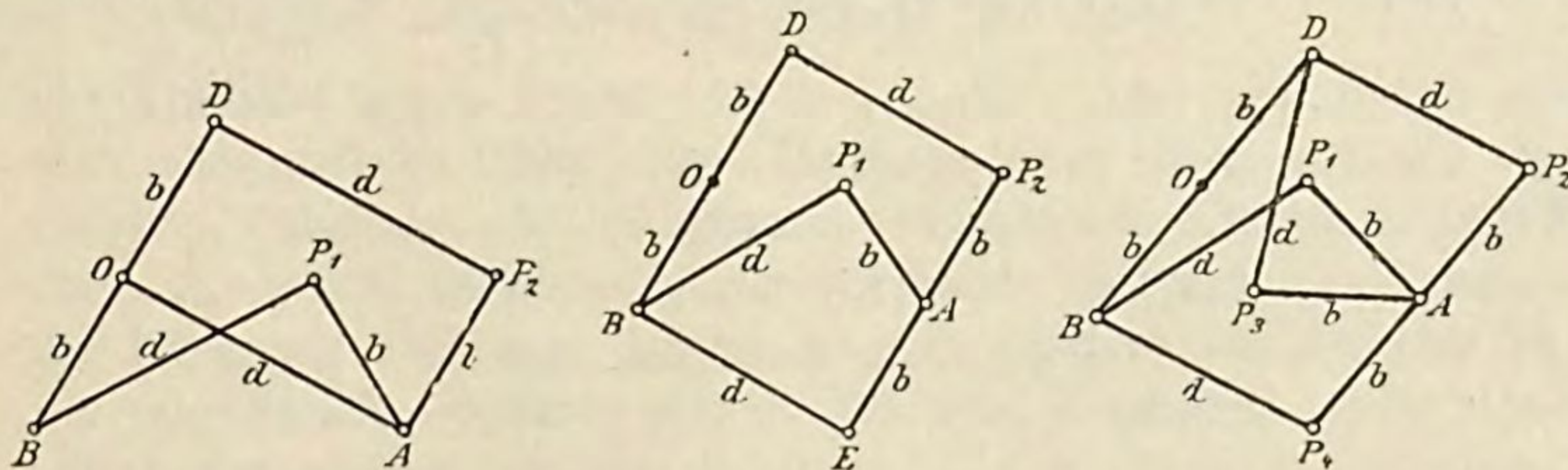
denn es ist $\overline{OP_2}$ parallel und gleich $\overline{BA}$ und, da $\overline{BP_1OA}$ ein Trapez mit gleichen nicht parallelen Seiten darstellt, so ist

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{BA} = d^2 - b^2, \text{ also constant.}$$

Man kann diesem Mechanismus auch die in Figur 2 dargestellte Form geben;

wobei $\overline{BE} = \overline{DP_2} = \overline{BP_1} = b$; $\overline{AP_1} = d$ und $\overline{BOD} = \overline{EAP_2} = 2d$, und zwar so, dass $\overline{BO} = \overline{OD} = \overline{EA} = \overline{AP_2} = d$ ist.

Bei diesen zwei Mechanismen liegen die beiden reciproken Radien von O aus in entgegengesetzter Richtung. Will man sie auf derselben Seite von O haben, so kann man dies dadurch erreichen, dass man die aus Figur 3 und 4 ersichtlichen Veränderungen an den in Figur 1 und 2 versinnlichten Mechanismen vornimmt.



Dabei ist jetzt in Figur 3

$\overline{BP_1} = \overline{AO} = \overline{DP_2} = d$; $\overline{AP_1} = \overline{AP_2} = b$ und $\overline{BOD} = 2b$, und zwar so, dass $\overline{BO} = \overline{OD} = b$ ist.

In Figur 4 ist dagegen $\overline{BE} = \overline{DP_2} = \overline{BP_1} = d$; $\overline{AP_1} = b$ und

$\overline{BOD} = \overline{EAP_2} = 2b$, und zwar so, dass $\overline{BO} = \overline{OD} = \overline{EA} = \overline{AP_2} = b$ ist. Bei allen vier Mechanismen findet für jede beliebige Stellung derselben statt:

$$\overline{OP_1} \cdot \overline{OP_2} = \text{const.}, \text{ (nämlich gleich } d^2 - b^2 \text{).}$$

Alle vier Inversoren haben dieselbe Anzahl von Gliedern wie der Peaucellier'sche Inversor, dagegen zwei mehr als der Hart'sche Inversor; bei Verwendung derselben für die Geradföhrung dürften dieselben in gewisser Beziehung denen von Peaucellier und Hart vorzuziehen sein. Bekanntlich eignet sich z. B. der Peaucellier'sche Inversor in seiner ursprünglichen Form aus dem Grunde nicht für diese practische Verwendung, weil derselbe in einen toten Punkt gerät, wenn die beiden reciproken Radien gleich werden. Dieser Uebelstand ist an allen vier der oben angeführten Mechanismen vermieden. Der Hart'sche Inversor, welcher ebenfalls von diesem Uebelstande frei ist, lässt dagegen anderseits bei gleichen Dimensionen der einzelnen Teile des Mechanismus geringere Excursionen zu als die beschriebenen vier Inversoren.

Endlich kann man durch Combination mehrerer dieser Mechanismen die verschiedenartigsten Relationen mechanisch verwirklichen.

Als Beispiel diene ein durch Figur 5 versinnlichter Mechanismus, welcher in gewissem Sinne als eine Verdoppelung des Mechanismus von Figur 4 anzusehen ist.

Derselbe besteht aus acht Cartonstreifen

$\overline{DP_2}$, $\overline{P_2AP_4}$, $\overline{BP_1}$, $\overline{P_1A}$, $\overline{DP_3}$, $\overline{P_3A}$, $\overline{BP_4}$ und $\overline{BOD}$. Dabei ist $\overline{DP_2} = \overline{DP_3} = \overline{BP_1} = \overline{BP_4} = d$ und $\overline{AP_1} = \overline{AP_3} = \overline{AP_2} = \overline{AP_4} = \overline{OB} = \overline{OD} = b$

Setzt man der Kürze halber $\overline{OP_1} = \rho_1$, $\overline{OP_2} = \rho_2$, $\overline{OP_3} = \rho_3$ und $\overline{OP_4} = \rho_4$, so hat man zunächst:

$$\rho_1 \rho_2 = \rho_3 \rho_4 = d^2 - b^2.$$

Da ρ_2 und ρ_4 die Längen der beiden Diagonalen des Parallelogramms OAP_2D darstellen (denn $OP_4 = DA$), so folgt ferner die Relation

$$\rho_2^2 + \rho_4^2 = 2(d^2 + b^2)$$

und in Verbindung mit obiger Relation

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_3^2} = \frac{2(d^2 + b^2)}{(d^2 - b^2)^2} \text{ u. s. w.}$$

Es kann also unter Anderem dieser Mechanismus zur Verwirklichung der drei Relationen dienen:

$$\rho_1 \rho_2 = \rho_3 \rho_4 = \text{const.}; \quad \rho_2^2 + \rho_4^2 = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_3^2} = \text{const.}$$

(Otto Fischer.)

*Zweiter Abschnitt. Mathematische Physik.***T. Apparate und Modelle zur Veranschaulichung der Gesetze der Fortpflanzung von Wellen.**

265a. Wellen-Apparat zur Darstellung einer sich vom Mittelpunkt kreisförmig fortpflanzenden Welle aus dem mechanischen Institut von **Dr. Stöhrer und Sohn**.

Der Apparat besteht aus einer rotirenden Scheibe mit den entsprechenden Wellencurven und zwei übereinanderstehenden Lochscheiben. Nachdem diese Scheiben centrisch zur Wellenscheibe am Stabe der Maschine befestigt, werden gleichlange, mit roten Köpfen versehene Stahlstäbchen in die Lochreihen eingesteckt. Sobald der Rotations-Apparat nun langsam in Bewegung versetzt wird, bilden die Stäbchen die sich kreisförmig vom Mittelpunkt fortpflanzenden Wellen.

265b. Projections-Wellenmaschine mit 4 kreisförmigen und 2 rechteckigen Glasplatten aus dem mechanischen Institut von **Dr. Stöhrer und Sohn**.

Erstere bringen zur Darstellung: 1) die Reflexion eines elementaren Stosses in einer beiderseits geschlossenen Röhre, 2) eine fortschreitende Longitudinalwelle, 3) die Luftbewegung in einer beiderseits offenen Röhre, welche ihren Grundton gibt und 4) die in einerseits geschlossener Röhre, welche den ersten Oberton (die Duodecime) des Grundtons gibt. Für die Darstellung der Reflexion einer einzelnen Welle am geschlossenen und offenen Ende einer Röhre dienen die beiden rechteckigen und für geradlinige Bewegung eingerichteten Platten.

270a. Apparat zur mechanischen Versinnlichung der Ablenkung der Lichtstrahlen beim Durchgang durch Parallellplatten, Prisma oder Linse, aus dem mechanischen Institut von **Dr. Stöhrer und Sohn**.

Auf zwei langen Brettern ist in der Mitte jeder Seite der Querschnitt einer planparallelen Platte, eines Prisma's, einer biconvexen und einer biconcaven Linse aus schwarzem Sammet eingelassen. Lässt man zwei Räder, die an einer Axe befestigt sind, schräg gegen die Fläche des Prisma's oder der Linse, wie Fig. zeigt, laufen, so wird zunächst nur das eine Rädchen die Sammetfläche berühren und durch deren Widerstand in der Bewegung aufgehalten werden, was eine Drehung der Axe zur Folge hat. Beim Verlassen des Prisma's wird die Drehung in entgegengesetzter Seite stattfinden. Die Rädchen durchlaufen daher denselben Weg wie die Lichtstrahlen in einem Prisma. Aehnlich verhält es sich bei dem Querschnitt der andern Figuren.

272a. Modell der Intensitätsfläche der Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung. Von Prof. **E. v. Lommel**, Univers. München.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich die Theorie der Beugungserscheinungen durch eine kreisförmige Oeffnung für Kugelwellen (*Fresnel'sche* Beugungserscheinungen) ausführlich behandelt und gezeigt, dass die Lichtstärke x in irgend einem Punkte des Auffangschirmes dargestellt wird durch den Ausdruck:

$$\text{Darin ist} \quad x = \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(U_1^2(y, z) + U_2^2(y, z) \right),$$

$$y = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) r^2, \quad z = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\zeta}{b} \cdot r,$$

wo a die Entfernung des beugenden Schirmes vom Lichtpunkt (den Radius der einfallenden Kugelwelle), b seine Entfernung vom Auffangschirm (de Bildebene), r den Radius der um den Pol der Kugelwelle beschriebenen kreisförmigen Oeffnung, ζ die Entfernung eines Punktes des Beugungsbildes von der Bildmitte (so dass $\frac{\zeta}{b}$ die Tangente des Beugungswinkels ψ darstellt) und λ die Wellenlänge bedeutet.

Die Functionen U_1 und U_2 sind specielle Fälle einer allgemeineren Function U_n , welche durch die für alle Werte von y und z stets convergente Reihe:

$$U_n(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2}(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4}(z) - + \dots$$

dargestellt werden kann, wobei $I_n(z)$ die Bessel'sche Function erster Art vorstellt. Mit der Function U_n steht die Function

$$V_n(y, z) = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2} I_{n+2}(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^{n+4} I_{n+4}(z) - + \dots$$

in innigem Zusammenhang, welcher seinen Ausdruck in der Gleichung

$$(-1)^n U_n - V_{-n+2} = \frac{i^n}{2} \left(e^{vi} + (-1)^n e^{-vi} \right)$$

$$v = \frac{y^2 + z^2}{2y}$$

findet, wo

ist. Die Functionen V spielen für die Beugungserscheinung eines kreisförmigen dunklen Schirmchens dieselbe Rolle, wie die Functionen U für diejenige der kreisförmigen Oeffnung. Für das dunkle Schirmchen ist nämlich die Lichtstärke

$$x' = \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(V_0^2(y, z) + V_1^2(y, z) \right);$$

sie ist daher vermöge vorstehender Relation bekannt, wenn sie für die kreisförmige Oeffnung berechnet ist.

Auch die Reihe V_n convergirt für alle Werte von y und z , jedoch sind zur numerischen Berechnung für $y < z$ die U -Reihen, für $y > z$ die V -Reihen bequemer. Für $y = z$, d. i. an der Grenze des geometrischen Schattens, hat man

*) Lommel. Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens theoretisch und experimentell bearbeitet; Abh. der k. bayer. Ak. d. Wiss. (2). 15. p. 229. 1884.

$$U_n(z, z) = V_n(z, z) = I_n(z) - \frac{I(z)}{n+2} + \frac{I(z)}{n+4} - \dots$$

Die numerische Berechnung dieser Ausdrücke und somit auch der Lichtstärke x (und x') lässt sich unter Benutzung der bekannten Werte der Bessel'schen Functionen ohne besondere Schwierigkeit durchführen. In der Eingangs erwähnten Abhandlung sind die Werte von $U_1, U_2, x; V_0, V_1, x'$ für $y = 0, \pi, 2\pi \dots$ bis 10π und für alle ganzzahligen Werte der Grösse z von $z = 0$ bis $z = 12$ berechnet und in Tabellen zusammengestellt, und ausserdem für jene Werte von y die Lichtstärken x und x' durch Curven graphisch veranschaulicht.

Vermöge der einfachen Gesetze, welchen die Functionen U_n und V_n unterworfen sind, nämlich:

$$U_n + U_{n+2} = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n, \quad V_n + V_{n+2} = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n,$$

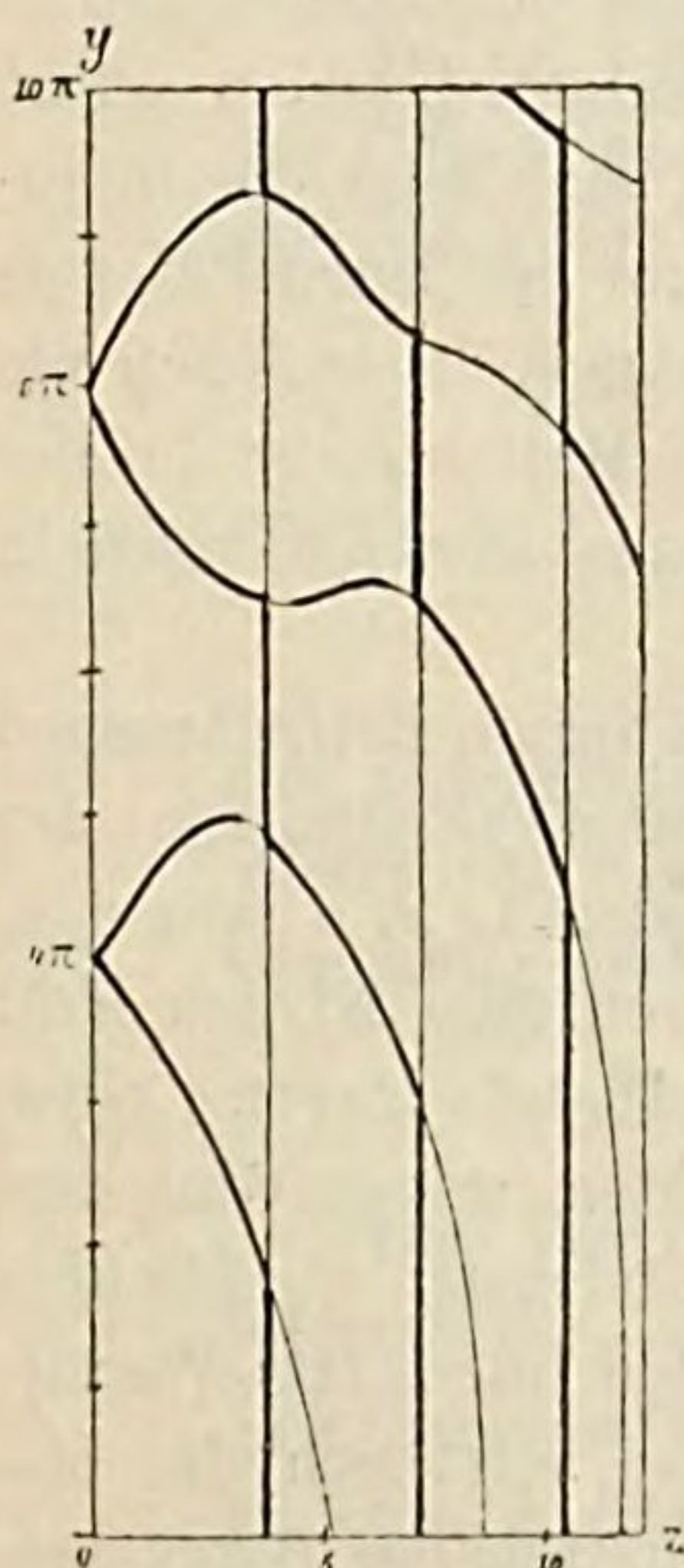
$$\frac{dU_n}{dz} = -\frac{z}{y} U_{n+1}, \quad \frac{dV_n}{dz} = \frac{z}{y} V_{n-1},$$

$$\frac{dU_n}{dy} = \frac{1}{2} U_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{n+1},$$

$$\frac{dV_n}{dy} = -\frac{1}{2} V_{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{n-1}$$

können übrigens die Intensitätsausdrücke x und x' auch allgemein discutirt und die Gesetze der Erscheinungen aus ihnen entwickelt werden. Zur bequemen Uebersicht betrachten wir z und y als rechtwinklige Coordinaten, und die Lichtstärke x als dritte Coordinate auf der zy -Ebene, senkrecht errichtet. So erhebt sich über dieser gleichsam ein Lichtgebirge, dessen Durchschnitt mit irgend einer zur y -Axe senkrechten Ebene die jeweilige zu dem betreffenden Wert von y gehörige Intensitätscurve liefert. Der Schnitt durch die z -Axe ($y = 0$) entspricht der Fraunhofer'schen Beugungserscheinung, für welche sich der Intensitätsausdruck auf

$$x = \left(\frac{2}{z} I_1(z)\right)^2$$



zurückzieht. Dieses Lichtgebirge wird für die Beugungserscheinung der kreisförmigen Oeffnung (auf deren Betrachtung wir uns von nun an beschränken) durch das in Rede stehende Gypsmodell veranschaulicht, welches auf Grund der oben erwähnten numerischen Tabellen resp. Curven hergestellt wurde. Es ist durch die verticalen Ebenen $y = 0, y = 10\pi, z = 0, z = 12$ begrenzt. Der Masstab ist so gewählt, dass der höchste Gipfel des Gebirges, welcher sich über dem Coordinatenanfang $z = 0, y = 0$ erhebt, 1 m hoch über die zy -Ebene emporragen würde. Dieser Gipfel ist jedoch in der Höhe von 16 cm abgeschnitten; alle übrigen Gipfel liegen unter diesem Niveau.

Für einen gegebenen Wert von y wird die Lichtstärke x ein Maximum oder Minimum für diejenigen Werte von z , für welche $\frac{dx}{dz} = 0$ ist. Mit Rücksicht

auf die obigen Gesetze für die U-Functionen findet man aber

$$\frac{dx}{dz} = -2 \left(\frac{2}{y} \right)^2 I_1 U_2.$$

Die Lichtstärke wird also ein Maximum oder Minimum, wenn entweder $I_1(z) = 0$ oder wenn $U_2(y, z) = 0$ ist, also über den diesen Gleichungen entsprechenden in der zy -Ebene verlaufenden Linien. Die erstere Gleichung liefert eine Schaar von zur y -Axe parallelen Geraden (s. die beigegebene Figur, welche den Verlauf der Linien $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ in der zy -Ebene und damit den Grundriss des Lichtgebirges darstellt), welche die z -Axe in den Punkten

$$z = 3,8317; 7,0156; 10,1735 \dots$$

schneiden, die den Intensitätsminimis der Fraunhofer'schen entsprechen, und deren Abstände sich mit wachsendem z dem Werte π nähern. Die Gleichung $U_2 = 0$ dagegen stellt eine transcendente Curve von eigentümlichem Verlaufe dar, deren Aeste (s. Fig.) in den Punkten

$$z = 5,1356; 8,4172; 11,6199 \dots$$

welche den Intensitätsmaximis der Fraunhofer'schen Erscheinung entsprechen und der Gleichung $I_2 = 0$ genügen, auf der z -Axe senkrecht stehen und paarweise in den Punkten $y = 4\pi, 8\pi, 12\pi \dots$ der y Axe zusammenlaufen. In diesen Punkten der Bildmitte herrscht völlige Dunkelheit ($x = 0$), wie schon Poisson gezeigt hat. Diese Doppelpunkte der Curve $U_2 = 0$ auf der y -Axe sind nebst den Minimis der Fraunhofer'schen Erscheinung auf der z -Axe die einzigen Punkte, in welchen U_1 und U_2 gleichzeitig verschwinden und die Lichtstärke x sonach Null ist. An allen Stellen, wo die beiden Liniensysteme, $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ sich durchschneiden, springt das Maximum (oder Minimum) der Lichtstärke von der einen Liniengattung auf die andere über; schreitet man nämlich längs eines Teiles der Linien $I_1 = 0$ oder $U_2 = 0$, auf welchem z. B. Intensitätsmaxima liegen, über einen ihrer Durchschnittspunkte fort, so geht hier das Maximum auf die Linie der anderen Gattung über, und der Fortsetzung der bisher verfolgten Linie gehören von nun an Minima der Lichtstärke zu, bis beim nächsten Schnittpunkt ein neuer Umtausch erfolgt. Ueber den Durchschnittspunkten selbst findet weder Maximum noch Minimum statt, sondern hier zeigt die Intensitätscurve einen Wendepunkt; andere Wendepunkte der Intensität entsprechen den Gipfeln der Curvenäste, d. h. den Punkten, in welchen die Ordinate y der Curve $U_2(y, z) = 0$ ein Maximum oder Minimum ist (in der Fig. erkennt man vier solche Punkte); auch an diesen Punkten vollzieht sich ein Wechsel zwischen Maximum und Minimum.

Schon diese an die Projection auf die zy -Ebene geknüpften Betrachtungen geben eine deutliche Vorstellung von den Gestaltungsverhältnissen des Lichtgebirges. Geht man z. B. längs der ersten Geraden $I_1 = 0$ (von dem Punkte $z = 3,8317$ der z -Axe) voran, so steigt man von dem Niveau Null aus zunächst in gleichbleibender Richtung in einem Thale aufwärts, einen steilen Berghang zur linken, einen Bergkamm zur rechten, dessen Grat dem ersten Aste der Linie $U_2 = 0$ entlang sich von seinem höchsten Punkte über der z -Axe ($z = 5,1356$) herabsenkt, bis er in dem ersten Intensitäts-Wendepunkt jenem ansteigenden Thale begegnet. Von hier an setzt sich das bisher verfolgte Thal in einen in gerader Richtung hin erstreckten Bergkamm

fort, während zur linken längs $U_2 = 0$ ein gekrümmtes Thal bis zum Niveau Null (im Punkte $y = 4\pi$ der y -Axe) sich hinabsenkt, u. s. f.

Eine unmittelbare Anschauung der eigentümlichen Verflechtung von Berggipfeln und Thalmulden in unserem Lichtgebirge gewährt jedoch das Modell; auf demselben sind die Bergkämme durch rote, die Thalwege durch blaue Linien angegeben, welchen in der Projection (s. Fig.) die schwächer und resp. stärker ausgezogenen Linien entsprechen.

Die Gipfel der Berge und die tiefsten Punkte der Thalmulden liegen über denjenigen Punkten der zy -Ebene, deren Coordinaten z und y den beiden Gleichungen

$$\frac{dx}{dz} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = 0$$

gleichzeitig genügen, d. i. über den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ mit der Curve $\frac{dx}{dy} = 0$.

Man erhält mit Rücksicht auf die oben angeführten Relationen für die U -Function

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2}{y}\left(\frac{2}{y}\right)^2 (U_1^2 + U_2^2) + \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(2 U_1 \frac{dU_1}{dy} + 2 U_2 \frac{dU_2}{dy}\right)$$

oder, da

$$2 \frac{dU_1}{dy} = U_0 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 \quad \text{und} \quad 2 \frac{dU_2}{dy} = U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3$$

ist:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2}{y} x + \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left[U_1 (U_0 + U_2) + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 (U_1 + U_3) \right].$$

Es ist aber

$$U_0 + U_2 = I_0 \quad \text{und} \quad U_1 + U_3 = \frac{y}{z} I_1;$$

man hat daher:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2}{y} x + \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_0 U_1 + \frac{z}{y} I_1 U_2 \right).$$

Da im vorliegenden Fall $I_1 U_2 = 0$ ist, so reducirt sich die Gleichung der Curve, welche mit den Linien $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ die gesuchten Durchschnittspunkte liefert, auf

$$\frac{2}{y} I_0 U_1 = x$$

oder

$$I_0 U_1 = \frac{2}{y} (U_1^2 + U_2^2),$$

aus welcher in Gemeinschaft mit der Gleichung $I_1 U_2 = 0$ die verlangten Werte von z und y sich bestimmen. Für $U_2 = 0$ vereinfacht sich diese Gleichung noch weiter auf

$$\frac{2}{y} U_1 = I_0.$$

Der Verlauf der Intensität längs irgend eines Radius des Beugungsbildes wird, wie bereits bemerkt, dargestellt durch die Schnittcurve des Lichtgebirges mit einer Ebene, welche bei dem zu den jeweils gegebenen Grössen a und b gehörigen Werte von y senkrecht zur y -Axe gelegt wird.

Die eigentliche Intensitätsfläche der Beugungsringe für jeden speciellen Wert von y wird dann erhalten, wenn man diese Intensitätscurve um ihre der Bildmitte entsprechende Ordinate rotiren lässt. Das Beugungsbild bleibt hienach für dieselbe Oeffnung (dasselbe r), dieselbe Wellenlänge und denselben Beugungswinkel ($\operatorname{tg} \psi = \frac{\zeta}{b}$) unverändert, wenn y sich nicht ändert, wenn also

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \text{Const.}$$

bleibt; d. h. das Beugungsbild ändert sich nicht, wenn man den Lichtpunkt und den Auffangschirm aus irgend einer gegebenen Lage gleichzeitig so verschiebt, dass sie in Bezug auf die beugende Oeffnung (als wenn diese eine Linse wäre) zu einander conjugirt bleiben.

(E. v. Lommel.)

274a. Optische Instrumente von Prof. **N. Jadanza** an der Universität Turin.

1. Das Universalprisma „Jadanza“ ist ein gerades Prisma von viereckigem Querschnitt mit den Winkeln 45° , 45° , $157^\circ 30'$, $112^\circ 30'$. Man kann damit Winkel von 45° , 90° und 180° abstecken und unzugängliche Distanzen messen. Der Vorteil gegenüber anderen Prismenconstructionen z. B. der Bauernfeind'schen besteht darin, dass nur 4 geschliffene Flächen nötig sind anstatt fünf.

Teorica di alcuni strumenti topografici a riflessione di N. Jadanza Atti della R. Acad. d. Science di Torino V. XXVII, 1892. Norme pratiche per l'uso del Prisma Universale Jadanza, Torino, Vincenzo Bona 1893.

2. Verkürztes terrestrisches Fernrohr.

Herr *Jadanza* hat bemerkt, dass man die Dimensionen eines aus zwei Linsen bestehenden Systemes so wählen kann, dass die beiden Ebenen, welche ineinander, gleich gross aber verkehrt, abgebildet werden, zusammenfallen.*) Er bringt ein solches System so hinter die Objectivlinse eines Fernrohres, dass jene Ebene mit der Brennebene der Objectivlinse zusammenfällt. In dieser Ebene entsteht dann kein verkehrtes, sondern ein aufrechtes Bild, das mit dem Ocular betrachtet wird. Nimmt man, ohne an Objectiv und Ocular etwas zu ändern, das ersterwähnte zweilinsige System heraus, so hat man ein astronomisches Fernrohr von gleicher Länge und gleicher Vergrösserung wie das terrestrische.

Connochiali Ridotti. Nota di N. Jadanza Atti della R. Acad. di Torino XIX. Il nuovo Connochiale. Rivista Scientifico-Industriale di Firenze 1886. Nuovo metodo per accorciare i connochiali terrestri R. Acad. di Torino XXI.

3. Das Plesiot teleskop.

Das oben beschriebene zweilinsige System kann auch als Objectiv eines Fernrohres verwendet werden. Von einem unendlich fernen Gegenstand entwirft die Vorderlinse ein Bild im Centrum der Hinterlinse, das demnach von dieser gar nicht verändert wird und durch ein Ocular betrachtet werden kann. Liegt dagegen das Object im vordern Brennpunkt

*) Es fällt dabei ein Brennpunkt der positiven Vorderlinse in das Centrum der gleichfalls positiven aber stärkeren Hinterlinse.

der Vorderlinse, so gibt diese Linse ein unendlich fernes Bild, das dann im Brennpunkt der Hinterlinse zu einem für das Ocular brauchbarem Bild umgeformt wird. Kommt das Object noch näher, z. B. in das Centrum der Vorderlinse, so wirkt diese gar nicht mehr, dagegen die Hinterlinse wie das Objectiv eines Mikroskopes. Mit einem Instrument, das aus einem solchen zweilinsigen System und einem Ocular besteht, kann man daher sowohl sehr ferne als sehr nahe Gegenstände scharf sehen.

4. Ein neuer Apparat zur Messung topographischer Basen.

Die letzterwähnte Eigenschaft des Plesioteleskopes hat Herr Jadanza benützt, um einen neuen Basismessapparat zur Ausführung der Porzo'schen Messmethode zu construiren. Bei dieser wird bekanntlich die Distanz einer Reihe in der Richtung der Basis hintereinander aufgestellter Mikroskope an untergelegten Masstäben gemessen. Nimmt man statt gewöhnlicher Mikroskope Plesioteleskope, so kann man dieselben auch zum optischen Abloten der Basisendpunkte benützen, wodurch eine Vereinfachung des Apparates erzielt wird.

Un nuovo apparato per misurare basi topografiche del Prof. N. *Jadanza*. Atti della R. Acad. di Torino XXVII.

5. Mikroskop mit constanter Vergrößerung.

Nimmt man als Objectiv eines Mikroskopes ein sogenanntes afocales Linsensystem, d. h. ein solches, welches aus zwei Linsen mit zusammenfallenden Brennpunkten aber nach verschiedenen Richtungen gekehrten Brennweiten besteht, so ist die Objectivvergrößerung unabhängig von der Entfernung des Objects und bloß abhängig von den beiden das afocale System bildenden Linsen bzw. deren Brennweiten. Wird ein solches Objectiv mit einem Ocular combinirt, so resultirt ein Mikroskop von constanter Vergrößerung, das beim Ablesen von Teilkreisen Verwendung finden kann.

Influenza della eccentricità dell' alidada sui vernieri ed un microscopio ad ingrandimento costante Atti della R. Acad. di Torino XXVI.

(Finsterwalder.)

U. Modelle zur Erläuterung der Krystallstructur.

276a. Glaskrystallmodelle von **C. Mohn**, Diener am mineralogischen Institut der Universität Rostock.

- a. Acht Modelle von einfachen und Combinationsformen (Glasmodellen mit Axenkreuzen.)
- b. Sieben Modelle von Hemiedrieen und Tetartoedrieen. (Die Holoedrieen als farbige Sterne in Glaskörpern.)
- c. Sieben Krystallmodelle mit krystallographischen und optischen Axen.

W. Zeichnungen und Modelle zur Thermodynamik.

292a. Serie von Isothermenflächen für die Gemenge zweier und dreier mischbarer Stoffe, von Reallehrer A. Blümcke in Nürnberg.

(Fortsetzung.)

7. *Isothermenfläche für die Lösungen eines Salzes in Wasser (oder eines festen Stoffes in einem flüssigen Lösungsmittel) für Temperaturen, bei welchen ersteres nur fest und dampfförmig, letzteres nur flüssig und dampfförmig sein kann; und wenn die Bildung von Hydraten ausgeschlossen ist.*

Das Coordinatensystem ist das gleiche wie in den Fällen 1, 2, 3 und 4, nur ist der Anteil des Wassers im Gemenge mit z statt mit x bezeichnet. In der Ebene $z = 1$ liegt die Isotherme des Wassers, in der Ebene $z = 0$ diejenige des Salzes, welche der Form nach mit jener übereinstimmt. Die empirische Fläche besteht aus fünf Teilen, der erste ist ein ebenes Dreieck dessen eine Seite die empirische Isotherme des Salzes ist, die ihr gegenüber liegende Ecke liegt in der theoretischen Isotherme des Wassers. Die Ebene des Dreiecks ist parallel zur ZV-Ebene, eine Seite desselben kann man als die Curve des beginnenden Festwerdens betrachten. Der zweite Teil der empirischen Fläche ist ein Conoïd, welches sich an das Dreieck anschliesst, seine Leitcurven sind die theoretischen Isothermen des Salzes und die des Wassers. An dieses Conoïd schliesst sich ein zweites Dreieck an, dessen Ebene gleichfalls parallel zur ZV-Ebene ist; es entspricht festem Salz flüssiger Lösung und Wasserdampf. Die nicht in den theoretischen Isothermen der Componenten gelegene Ecke des Dreiecks ist ein Punkt der Curve vollendeter homogener Verflüssigung, welche von hier aus einerseits zum Punkte vollendeter Verflüssigung der empirischen Isotherme des Wassers geht, andererseits sich der theoretischen Isotherme des Salzes asymptotisch nähert.

An die zwei übrigen Seiten des Dreiecks setzen sich zwei Conoïde an; das eine entspricht festem Salz und flüssiger Lösung; seine Leitcurven sind die theoretische Isotherme des Salzes und der sich dieser asymptotisch nähernde Teil der Curve vollendeter homogener Verflüssigung; das andere entspricht flüssiger Lösung und Wasserdampf, seine Leitcurven sind der andere Teil der Curve vollendeter homogener Verflüssigung und die theoretische Isotherme des Wassers.

Im Modell sind von der theoretischen Fläche nur die Isothermen des Salzes und des Wasserdampfes angegeben, da die übrigen Teile leicht zu ergänzen sind.

8. *Isothermenfläche für die Lösungen eines Salzes in Wasser für gleiche Temperaturen wie im vorigen Fall, wenn die Bildung eines Hydrates möglich ist, welches bei den betreffenden Temperaturen nur fest und gasförmig, nicht flüssig sein kann.*

Die empirische Fläche besteht in diesem Fall aus acht Teilen: zunächst aus einem Dreieck und einem Conoïd, welche dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Fall. An das Conoïd schliesst sich ein Dreieck an, dessen Ebene wieder parallel zur ZV-Ebene ist, es entspricht festem Salz, Hydrat

und Wasserdampf. Von den zwei nicht an das Conoïd anstossenden Seiten entspricht die eine festem Salz und Hydrat, die andere Hydrat und Wasserdampf. Vom Schnittpunkt beider geht parallel zur PV-Ebene die nunmehr nur einem Zustand entsprechende Isotherme des Hydrats nach oben. An die erste Seite des Dreiecks schliesst sich ein Conoïd an, dessen Leitcurven die theoretische Isotherme des Salzes und diejenige des Hydrats sind. Auf die zweite Dreiecksseite folgt ein Conoïd, dessen Leitcurven die Isotherme des Hydrats und die theoretische Isotherme des Wassers sind; es entspricht Wasserdampf und Hydrat und hat eine ganz ähnliche Bedeutung wie das erste Conoïd im vorigen Fall (7), nur dass an die Stelle des Salzes das Hydrat getreten ist. Dasselbe gilt für die noch übrigen Teile der empirischen Fläche; sie sind von derselben Form wie die entsprechenden Stücke im vorigen Fall, nur muss man bei der Erklärung das Salz mit dem Hydrat vertauschen und die theoretische Isotherme des Salzes durch diejenige des Hydrats ersetzen.

Im Modell sind von der theoretischen Fläche nur die Isotherme des Salzes, des Wassers und ein Teil der Isotherme des Hydrats angegeben, da auch hier alles Übrige leicht zu ergänzen ist.

9. Isothermenfläche für die Lösungen eines Salzes in Wasser, wenn die Bildung eines Hydrates möglich ist für Temperaturen, bei welchen das Salz nur fest und dampfförmig, das Wasser nur flüssig und dampfförmig, das Hydrat sowohl fest als auch (labil-)flüssig und gasförmig sein kann.

Die empirische Fläche hat dieselben Teile wie die im vorhergehenden Fall besprochene; da aber die Isotherme des Hydrats eine Hebung und Senkung mehr hat, als im vorigen Fall, deren einer Teil dem labil flüssigen Zustand entspricht, so entsteht auf der theoretischen Fläche eine Welle mehr, wodurch zu neuen empirischen Teilen Veranlassung gegeben wird. Diese bestehen zunächst in einem Dreieck parallel zur ZV-Ebene, welches zwischen dem ersten und zweiten Dreieck des vorigen Falls gelegen ist, an die eine Seite desselben schliesst sich ein Conoïd an, welches labiler flüssiger Lösung und Wasserdampf entspricht und übergeht in jenes, welches auf die empirische Isotherme des Wassers ausläuft. Seine Leitcurven sind ein Teil der Curve vollendeter homogener Verflüssigung, welche in diesem Falle sich in zwei Äste gabelt, sowie die theoretische Isotherme des Wassers. An die andere Seite des Dreiecks schliesst sich ein Conoïd an, welches labiler flüssiger Lösung in Berührung mit festem Salz entspricht. Seine Leitcurven sind die theoretische Isotherme des Salzes und derjenige Teil der Curve vollendeter homogener Verflüssigung, welcher von der Ecke des ebengenannten Dreiecks aus aufsteigt und auf der theoretischen Isotherme des Salzes mündet. Letzterer Punkt hat dieselbe Druckcoordinate wie die Punkte desjenigen Teils der empirischen Isotherme des Hydrats, welcher labil-flüssigen und festen Zuständen entspricht. Er ist zwei weiteren Teilen der empirischen Fläche gemeinsam, nämlich zwei Dreiecken, deren Spitzen einerseits der ebengenannte Punkt der Curve vollendeter homogener Verflüssigung ist, andererseits ein auf gleicher Höhe gelegener Punkt des anderen Astes derselben Curve. Beide Dreiecke entsprechen

labil-flüssigen und festen Zuständen; sie vermitteln den Übergang auf die stabilen Teile der empirischen Fläche.

Im Modell sind von der theoretischen Fläche nur die Isothermen des Salzes, des Wassers und diejenigen Teile der Isotherme des Hydrats angegeben, welche flüssigen und festen Zuständen des fertigen Hydrats entsprechen. Das labil-flüssigen und gasförmigen Zuständen entsprechende Dreieck der empirischen Fläche ist besonders hervorgehoben.

10. System von Isothermenflächen für die Lösungen zweier Salze in Wasser, wenn die Bildung eines Doppelsalzes möglich ist, welches ebenso wie Salz ein Hydrat bilden kann für Temperaturen, bei welchen die Salze, das Doppelsalz und ihre Hydrate nur fest und dampfförmig sein können, das Wasser nur flüssig und dampfförmig sein kann.

In einem Coordinatensystem, wie bei Fall 5 und 6 haben die Flächen des Systems die theoretische und empirische Isotherme des Wassers in der Ebene $Z = 1$ gemeinsam; die Schnittcurven der Flächen des Systems mit der Ebene $Z = 0$ werden wieder erhalten, indem man die Isothermen eines Gemenges zweier Salze, welche ein Doppelsalz bilden können, auf diese Ebene projicirt. Die im Modell angegebene Isotherme eines Gemisches zweier solcher Salze besteht von rechts nach links gerechnet aus folgenden stabilen Teilen (die labilen sind alle weggelassen). Der erste hg entspricht einem homogenen gasförmigen Gemenge beider Salze, der zweite gf parallel zur ZV-Ebene festem zweiten Salz und dem Dampf beider (das zweite Salz soll bei schwächerem Druck fester werden als das erste), der dritte fe festem zweiten Salz und dem Dampf des ersten, der vierte ed parallel zur Z-V Ebene Doppelsalz und Dampf des ersten, der fünfte dc denselben Zuständen, der sechste cb parallel zur ZV-Ebene Doppelsalz, festem erstem Salz und Dampf des ersten, der siebente bia festem Doppelsalz und festem erstem Salz. Dementsprechend haben wir auf den angrenzenden Teilen (Conoïden und Dreiecken) der betr. empirischen Isothermenfläche des Systems die gleichen Zustände in Berührung mit Wasserdampf; auf dem siebenten Teile jedoch nur bis zu einem bestimmten Druck (dem Punkte i entsprechend). Von der diesem Druck entsprechenden Erzeugenden an gerechnet besteht die empirische Fläche noch aus zwölf Teilen. Unter der Voraussetzung, dass das Hydrat des Doppelsalzes sich bei niedrigerem Drucke bildet, als das Hydrat des ersten Salzes, ist der erste dieser zwölf Teile ein Dreieck (seine Ebene ist wie diejenige aller übrigen Dreiecke parallel zur ZV-Ebene) ikζ; es entspricht festem Doppelsalz, dessen Hydrat, festem erstem Salz und Wasserdampf. An seine zwei noch freien Seiten schliessen sich Conoïde an, das eine links gelegene aikl entspricht festem Doppelsalz, seinem Hydrat und festem erstem Salz, das andere lkζε dem Hydrat des Doppelsalzes, festem erstem Salz und Wasserdampf. An das letztere schliesst sich wieder ein Dreieck lεm, es entspricht dem Hydrat des Doppelsalzes, dem Hydrat des ersten Salzes, erstem Salz und Wasserdampf. An die linksgelegene Seite schliesst sich ein Conoïd rlmnu an entsprechend beiden Hydraten, an die andere Seite ein Conoïd nmεδ entsprechend beiden Hydraten und Wasserdampf. An letzteres setzt sich wieder ein Dreieck noδ an; es entspricht beiden Hydraten, flüssiger Lösung des Hydrats des Doppelsalzes und

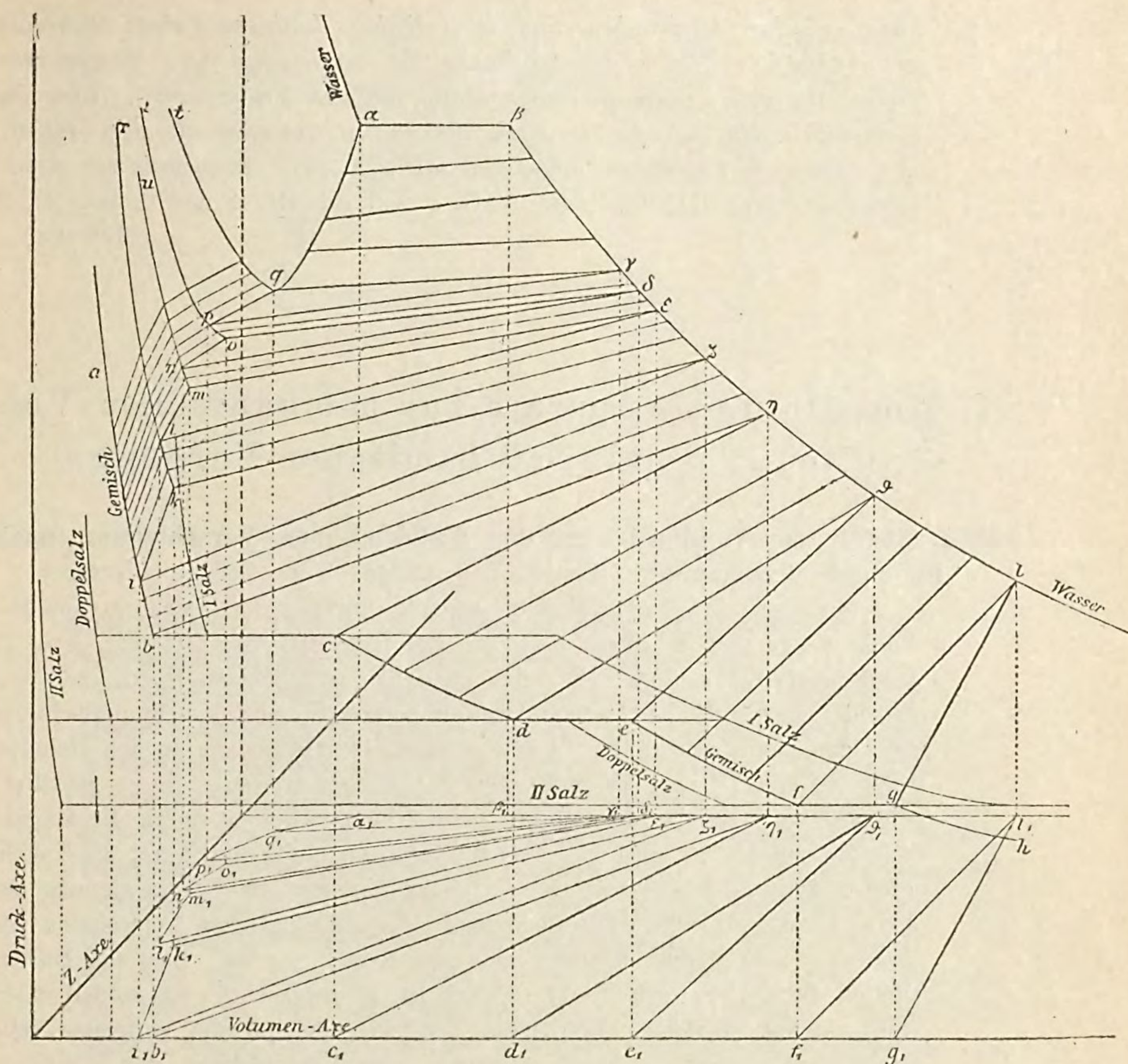


Fig. 4.

Wasserdampf. Das sich an die linksgelegene Seite anschliessende Conoïd $unops$ entspricht beiden Hydraten und flüssiger Lösung, das sich an die andere Seite anschliessende Conoïd $po\delta\gamma$ dem Hydrat des ersten Salzes flüssiger Lösung und Wasserdampf. Auf das letztere Conoïd folgt wieder ein Dreieck $pq\gamma$, es entspricht dem Hydrat des ersten Salzes, flüssiger Lösung und Wasserdampf. Das sich an seine links gelegene Seite ansetzende Conoïd $spqt$ entspricht dem Hydrat des ersten Salzes und flüssiger Lösung, das sich an die andere Seite ansetzende $q\beta\gamma\alpha$ flüssiger Lösung und Wasserdampf. Die beiden letzten Conoïde stossen an den von der Curve vollendeter homogener Verflüssigung αqt begrenzten theoretischen Teil, welcher homogen flüssigen Zuständen entspricht.

Im Modell sind alle labilen Teile (ausser bei der Isotherme des Wassers) weggelassen; von den theoretischen Teilen der Fläche sind nur die in der Ebene $Z=1$ gelegene Isotherme des Wassers angegeben, sowie einzelne Teile der in der Ebene $Z=0$ gelegenen Isothermen der Salze, des Doppelsalzes und des Gemisches.

Vergleiche hiezu die Abhandlungen des Verfertigers „Ueber den Zusammen-

hang zwischen empirischen und theoretischen Isothermen eines Gemenges zweier Stoffe“, „Ueber die Aenderung der empirischen und theoretischen Isothermen von Gemengen zweier Stoffe mit der Temperatur“, „Über die geometrische Darstellung der Isothermenflächen von mehr als zwei Stoffen“ und „Über die Isothermenflächen von Salzlösungen“. Zeitschrift für physikalische Chemie Bd. VI, 2, Bd. VIII, 5 und Bd. IX, 1 und 6, Bd. XI, 2 (Blümcke.)

X. Modelle und Apparate zur mechanischen Versinnlichung elektrodynamischer Vorgänge.

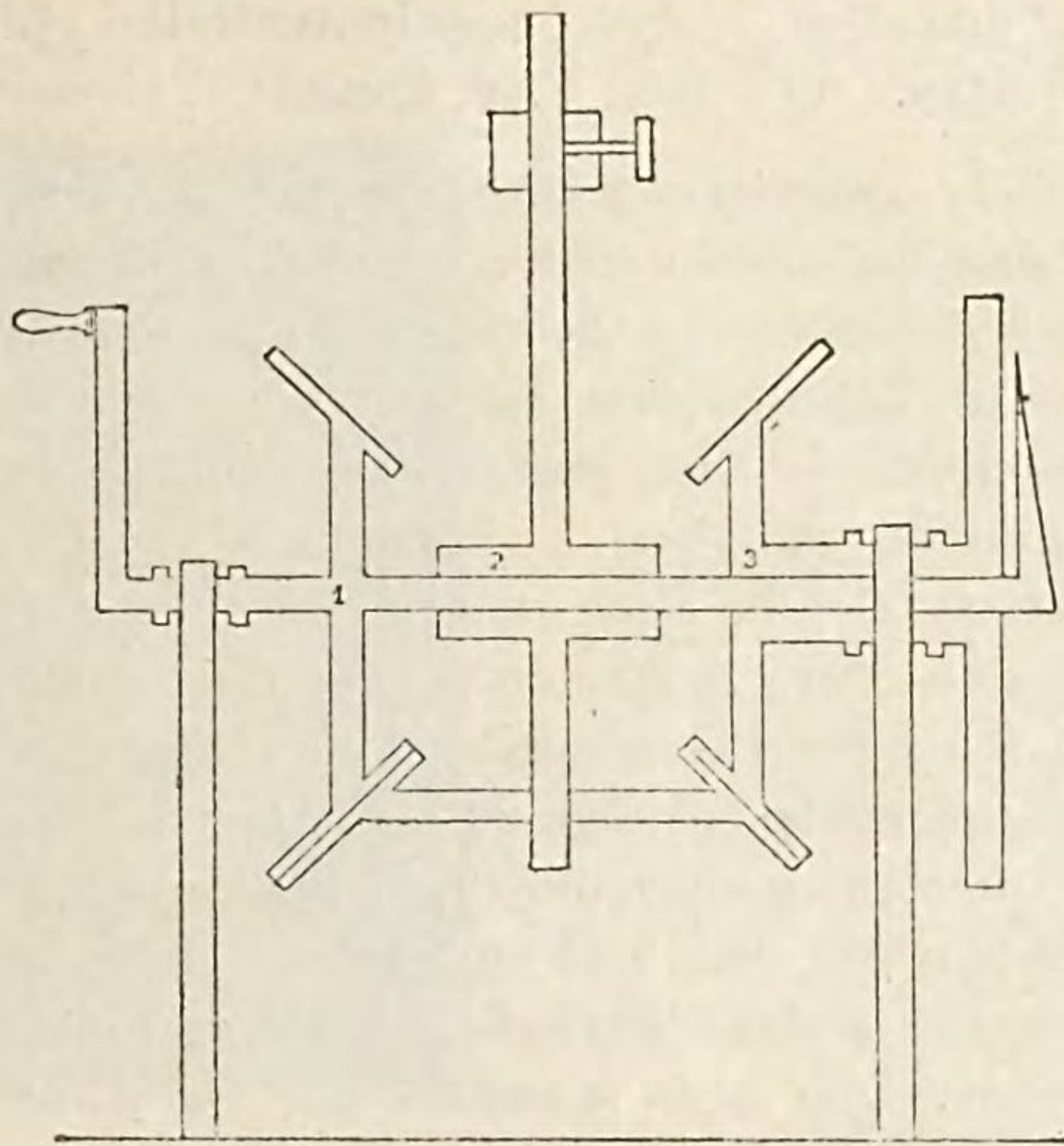
295a. Modell zur Versinnlichung der dielektrischen Verschiebung nach Maxwell's Anschauung. Von Prof. O. Lodge, Univ. College, Liverpool.

Der zur Ausstellung gelangte Apparat unterscheidet sich in einigen Punkten von den im Haupt-Kataloge auf Seite 401 und 402 (Fig. 1 u. 2) beschriebenen Modellen. Auf eine in einen rechteckigen Holzrahmen gespannte, über 4 Rollen laufende Schnur sind 8 Elfenbeinkugeln perlschnurartig aneinandergereiht und durch je zwei Gummischnüre an den Rahmen befestigt. Jede Kugel ist mit einer Schraube versehen, die es gestattet, die Friction, welche die Schnur beim Hindurchgleiten durch die Kugeln erfährt, beliebig zu variiren. Das Durchgleiten der Schnur durch die Kugeln (der elektrische Strom) ist stets gleichzeitig mit einer Verschiebung der Kugeln aus ihrer Gleichgewichtslage (der dielektrischen Polarisation des Mediums) verbunden. Klemmt man die Kugeln so fest, dass ein Durchgleiten der Schnur nicht mehr möglich ist, so repräsentirt das Modell einen vollkommenen Isolator. Bleikugeln, welche man an die verticalen Teile der Schnur ankleben kann, erzeugen eine Verschiebung der Elfenbeinkugeln, die soweit fortschreitet, bis die elastische Kraft der Gummischnüre (entsprechend der durch die dielektrische Polarisation geweckten Gegenkraft) dem Gewichte der Bleikugeln (der elektromotorischen Kraft) das Gleichgewicht hält. (Schütz.)

297a. Apparat zur mechanischen Versinnlichung der elektrodynamischen Inductionswirkung von Dr. H. Ebert. Ausgestellt von Herrn Universitäts-Mechaniker Böhner in Erlangen.

Der Apparat lehnt sich an die auf Seite 405 und fl. des Hauptkataloges beschriebenen Modelle *Maxwell's* und *Boltzmann's* an und nimmt eine Zwischenstellung zwischen beiden ein.

Man denke sich das *Maxwell'sche* Modell (Fig. auf flg. S.) mit einer Vorrichtung versehen, welche es gestattet, das an dem Querarme der Axe 2 befindliche Gewicht während der Rotation vom Ende des Querstabes gegen die Axe zu treiben; dann wird das Modell befähigt sein, das bei Verkleinerung des wechselseitigen Inductions-Coëfficienten zweier Strombahnen eintretende Inductionsphänomen (etwa das Entstehen eines



gleichsinnigen elektrischen Stromes in einem Leiter bei seiner Entfernung von einem zweiten elektrischen Strome) darzustellen.

Diese Vorrichtung realisiert Herr *Ebert* dadurch, dass er auf den Querarm zunächst das Gewicht, danach eine Spiralfeder und endlich einen Gummipolster schiebt. Vor dem Experimente bringt man, die Feder zusammendrückend, das Gewicht möglichst an das Ende des Querarmes hin. Um es in dieser Lage festzuhalten, stemmt man ein Holzstäbchen schräge zwischen eine Einfräsung, die an dem Gewichte gemacht ist, und einen auf einem kleinen Hebel sitzenden Stift. Ist der Apparat in Rotation, dann wird im geeigneten Momente eine Nase vorgeschoben, welche, wenn der Hebel während der Rotation an sie stösst, das Stäbchen zum Ausspringen und hiedurch die Federspannung zur Auslösung bringt; das Gewicht schnellt gegen die Axe und der secundäre Cykel macht eine der des primären gleichgerichtete Rotationsbewegung.

Will man aber das bei Vergrößerung des wechselseitigen Inductionscoefficienten auftretende Phänomen demonstrieren, so schiebt man zuerst die Spiralfeder, dann das Gewicht möglichst nahe an die Axe hin. Hier lässt man es durch einen Faden festhalten, dessen Endschleife um den auf dem kleinen Hebel sitzenden Stift geschoben ist. Dreht sich der Hebel um, so rutscht die Schleife ab, das Gewicht schnellt gegen das Ende des Querarmes, und eine Gegen-Rotation des sekundären Cykels ist die Folge der hiedurch bewirkten Vergrößerung des wechselseitigen Inductionscoefficienten. Das Umdrehen des Hebels aber wird wiederum durch das Vorschieben der Nase bewirkt.

Natürlich gestattet der Apparat ausserdem auch alle jene Experimente auszuführen, die schon mit dem *Maxwell'schen* möglich sind, doch ist er nicht befähigt, die mit dem *Boltzmann'schen* Bicycle-Modelle demonstrierbaren ponderomotorischen Wirkungen zu zeigen.

(Näheres vergl. *Wiedemann's Annalen*, August-Heft 1893.)

Preis des Apparates 100 Mark.

(Schütz.)

298a. Sichtbare Darstellung der aequipotentialen Linien auf durchströmten Platten. Von Prof. E. v. Lommel, Universität München.

Eine einfache Ueberlegung lässt erkennen, dass die zu den Stromlinien einer leitenden dünnen Platte senkrechten Linien gleichen Potentials zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man daher Eisenfeilspäne auf die vom Strom durchflossene Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

Die benutzten Metallplatten haben einen grössten Durchmesser von 4—5 cm und sind etwa $\frac{1}{2}$ mm dick; die Zuleitungsdrähte sind in der Regel an den Rand der Platte angelötet und liegen in ihrer Ebene. Die angewendete Stromstärke beträgt 20—35 Ampère. Um die entstandenen Bilder festzuhalten, wird über die Platte (bei roter Beleuchtung) photographisches Papier gebreitet und auf dieses die Eisenfeile gesiebt; die Figuren bilden sich auf der Papierfläche ebenso vollkommen aus, wie auf der Platte selbst, und eine kurzdauernde Belichtung mit wirksamen Strahlen, etwa das Aufflammen eines Zündhölzchens, genügt, um das Bild dem lichtempfindlichen Papierblatt einzuprägen. Damit das photographische Papier sich möglichst innig an die Platte und deren nichtleitende Umgebung anschmiege, wird die Platte samt ihren Zuleitungsdrähten in einen Gypsguss eingelassen, dessen Vorderfläche mit der Platte in derselben Ebene liegt. Um die Trägheit und den Reibungswiderstand der Feilspäne zu überwinden, wird die an einem Stativ horizontal eingespannte Gypsplatte kleinen regelmässigen Erschütterungen ausgesetzt; dies geschieht durch eine vibrirende Stimmgabel aus Messing; eine stählerne Stimmgabel nämlich würde durch den Magnetismus, den sie in der Nähe eines so starken Stromes annimmt, das Magnetfeld der Strömung stören. Die Herstellung einer Figur erfordert nur wenige Augenblicke.

Die Feilspäne gruppieren sich immer so, wie es die Theorie für die Aequipotentiallinien verlangt; die Curven stehen namentlich stets senkrecht zu den Begrenzungslinien der Platte, die ja immer Stromlinien sind; hier biegen sie um den Rand der Platte um, indem jede auf der Rückseite der Platte congruent mit ihrem Verlaufe auf der Vorderseite weitergeht und in sich zurückläuft. Da hienach diese Linien nur auf der Platte selbst, nicht aber auf ihrer nichtleitenden Umgebung entstehen, so erhält man auf dem Papier ein durch ihre Aequipotentiallinien schraffirtes Bild der Platte selbst; auch die Zuleitungsdrähte bilden sich ab, quergestrichelt vermöge der zu ihnen senkrechten Aequipotentialen. Auf diese Weise erscheinen im photographischen Bild auch die Umrisse der Platte in natürlicher Grösse.

Als Beispiele mögen einige der zahlreichen nach dieser Methode hergestellten Bilder mitgeteilt werden, in unmittelbaren Clichés nach den Original-Photogrammen (deren Schärfe sie freilich nicht erreichen), zusammengestellt mit den Bildern der Aequipotentiallinien, wie sie sich aus Theorie und Erfahrung für dieselben Platten ergeben.

Die Fig. 1a entsteht auf einer kreisförmigen Platte mit an zwei Stellen ihres Umfanges angelöteten Zuleitungsdrähten, welche in der Ebene der Platte verlaufen und sich in der Figur querschraffirt mit abgebildet

Fig. 1a.

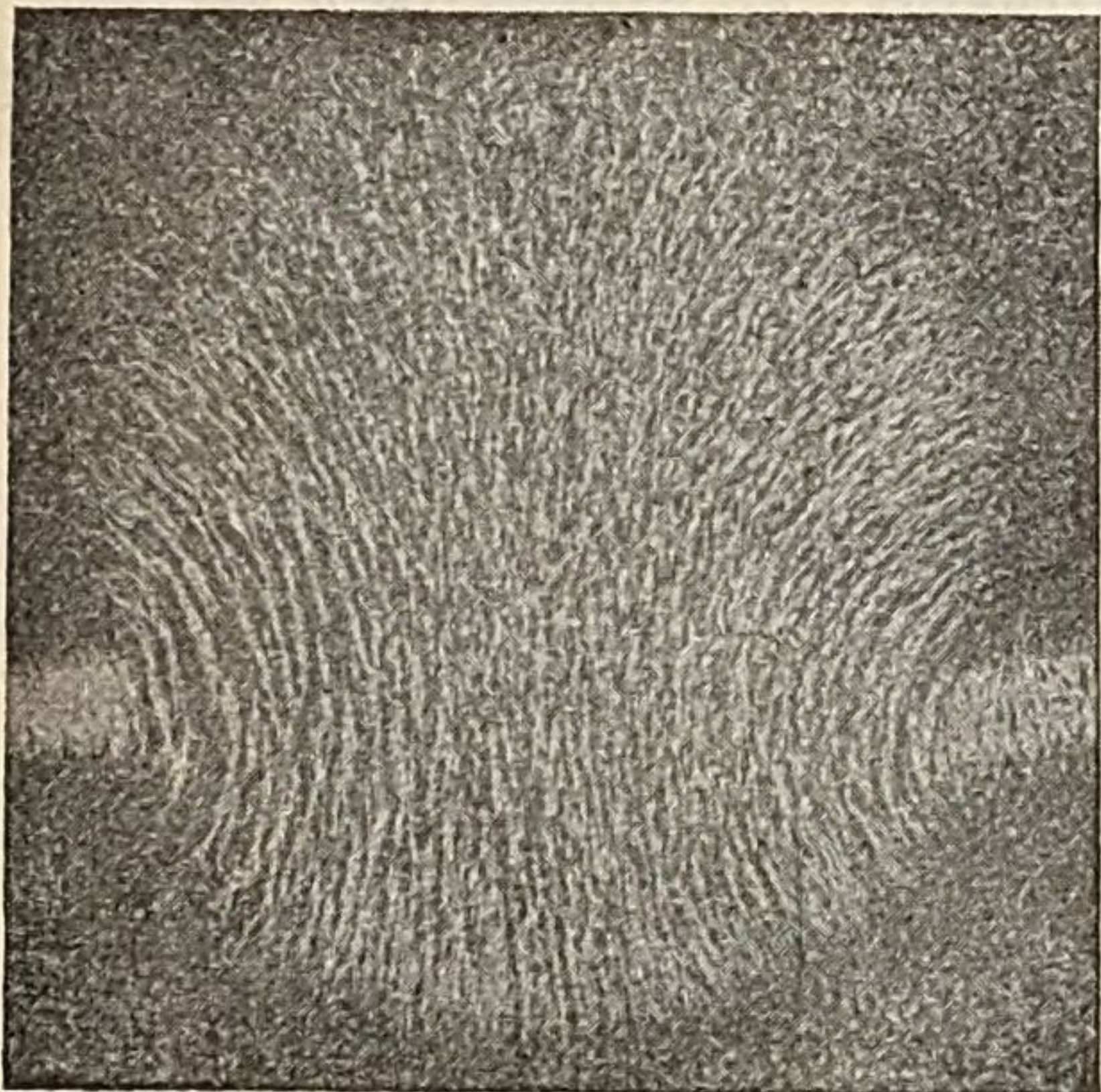


Fig. 1b.

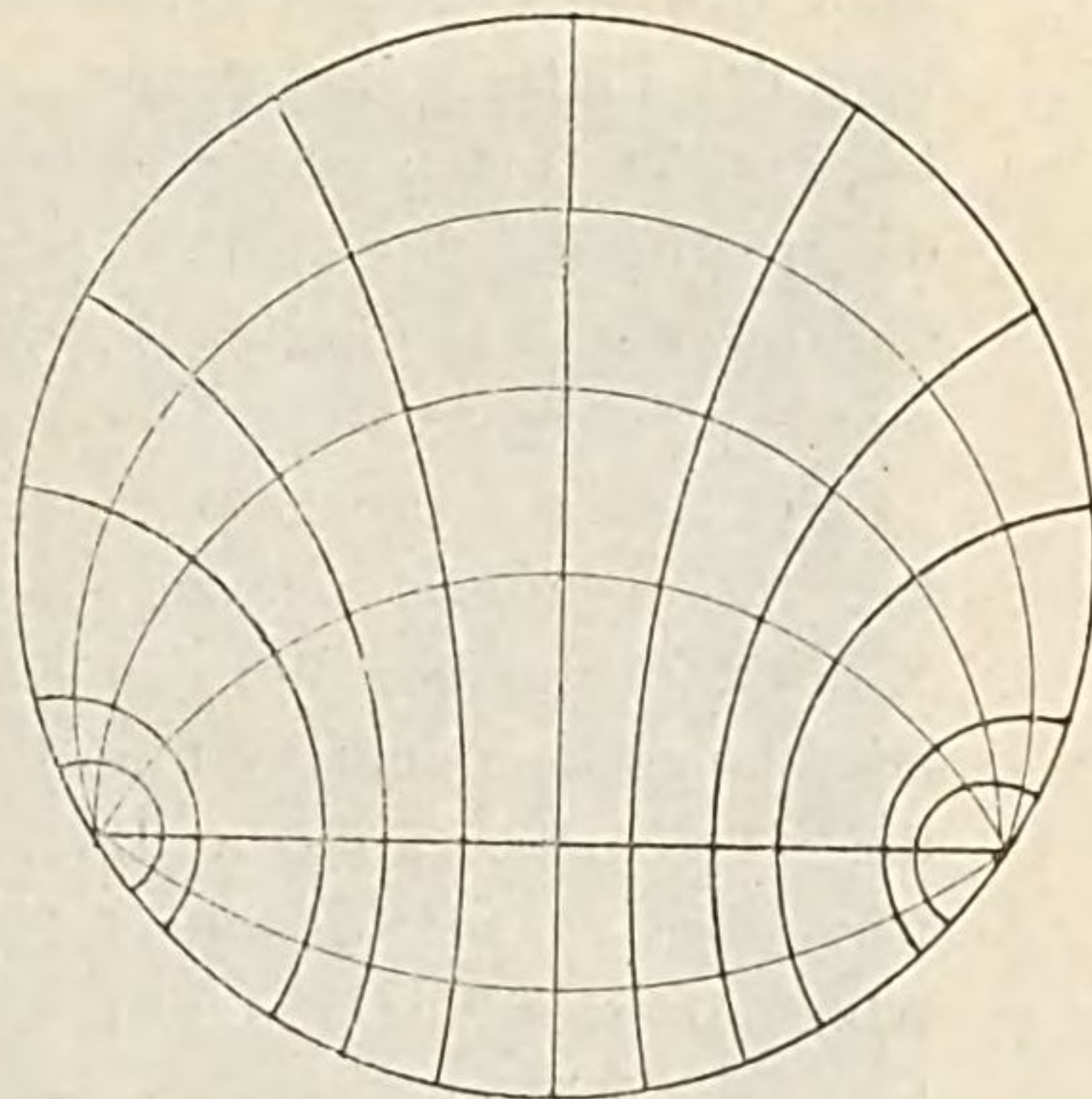


Fig. 2a.

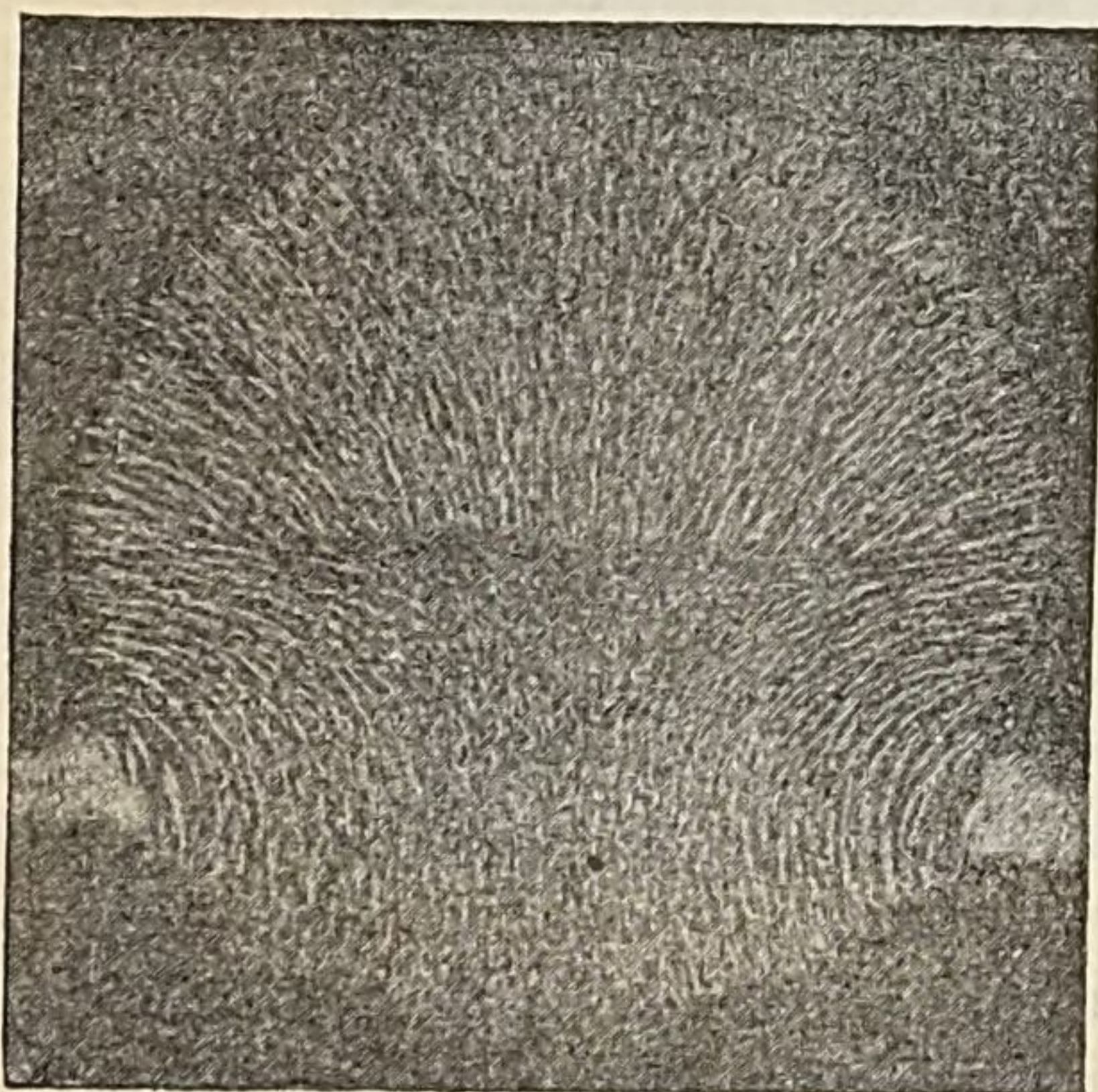


Fig. 2b.

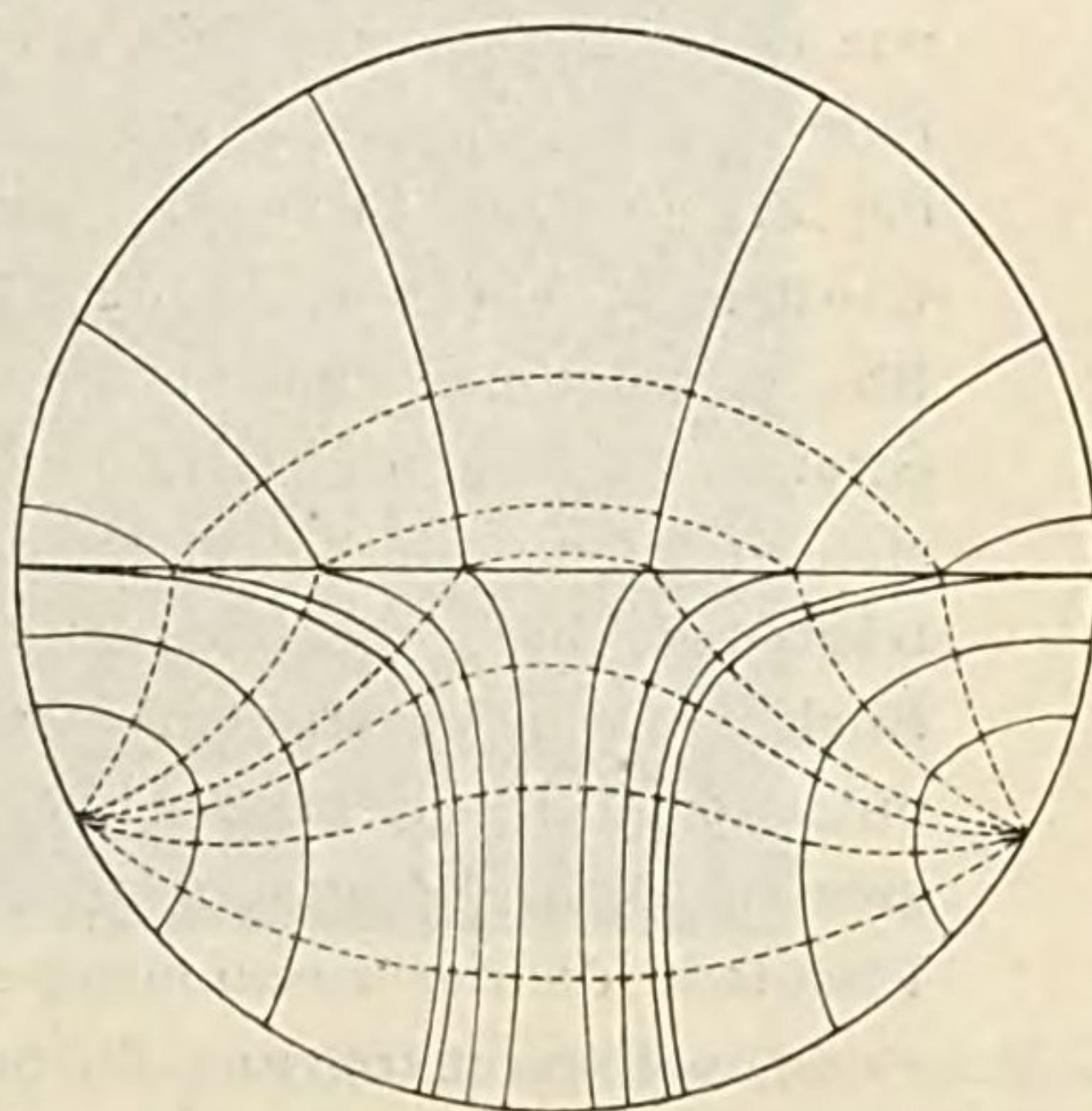


Fig. 3a.

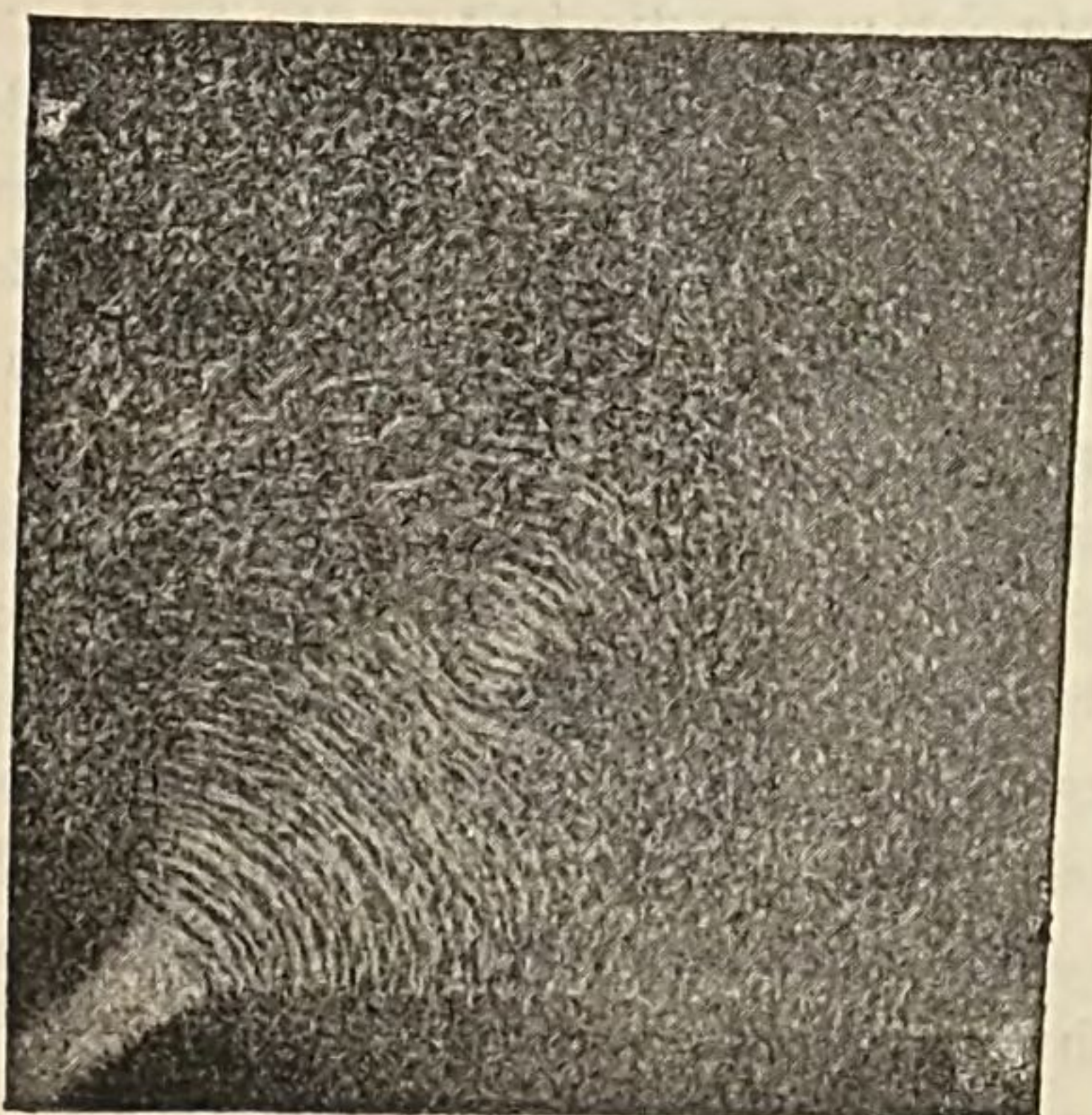
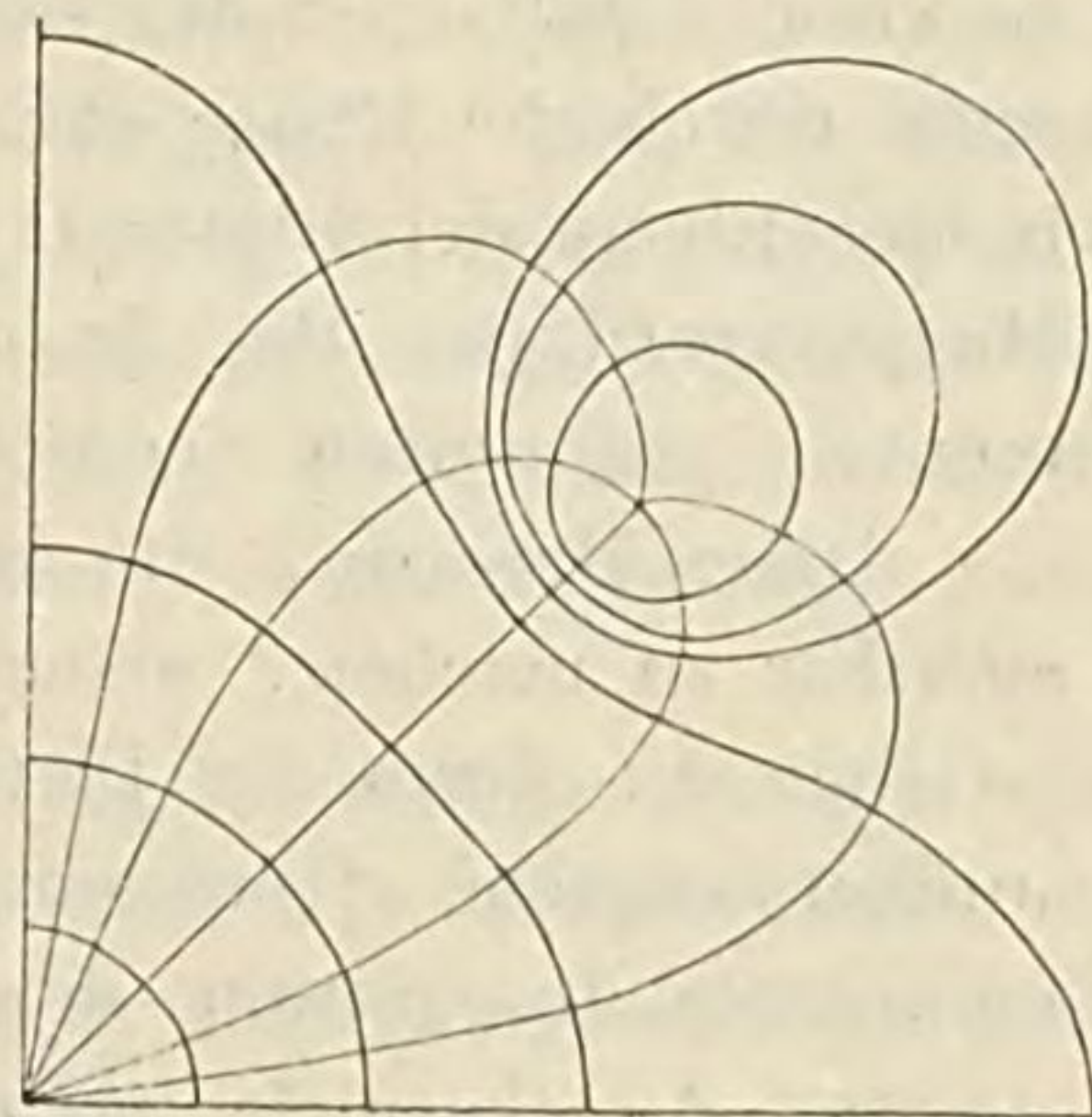


Fig. 3b.



haben. Fig. 1b zeigt die allbekannten Aequipotentialen derselben Platte samt den zugehörigen Stromlinien. Letztere, zu welchen auch der Umfang der Platte selbst gehört, sind nämlich Kreise, welche durch die beiden Elektrodenpunkte gehen, erstere die zu ihnen senkrechten Kreise, deren Mittelpunkte in der Verbindungsgeraden der Elektroden liegen und diese Gerade in Punkten schneiden, die zu den Elektrodenpunkten harmonisch liegen.

Besonderes Interesse beansprucht die Fig. 2a, welche sich auf einer kreisförmigen Platte bildet, deren eine (in der Fig. obere) Hälfte aus Kupfer, die andere (untere) Hälfte aus Blei besteht; die beiden Hälften sind längs dem (horizontalen) Durchmesser zusammengelötet. Am Rande der Bleihälfte, in den Endpunkten einer zum Trennungsdurchmesser parallelen Sehne, befinden sich die Elektroden. Die Figur 2b ist der Abhandlung von *Quincke*^{*)}: „Ueber die Verbreitung eines elektrischen Stromes in Metallplatten“ entnommen; sie stellt die theoretisch abgeleiteten und experimentell bestätigten Aequipotentiallinien einer eben solchen Kupfer-Bleiplatte samt den zugehörigen (punktirten) Stromlinien dar. Man erkennt, dass die Curven der Fig. 2a denselben Verlauf nehmen wie diese Aequipotentialen. Namentlich zeigt sich längs der Trennungslinie die (bekanntlich nach dem Tangentengesetz erfolgende) Brechung der Linien beim Uebergang aus Blei in Kupfer. Vermöge dieses discontinuirlichen Uebergangs bildet sich daher auch der Durchmesser, der das Blei vom Kupfer scheidet, deutlich ab. Auch der Umstand, dass die Stromdichte auf die Gruppierung der Eisenteilchen Einfluss übt, indem sich dieselben an Stellen grösserer Stromdichte enger zusammenschaaren, trägt dazu bei, die Grenzlinie scharf hervortreten zu lassen. Denn ein Blick auf die Stromlinien der *Quincke'schen* Fig. 2b zeigt, dass in dem mittleren Teil der Doppelplatte die Stromdichte auf der Kupferhälfte grösser ist, als auf der angrenzenden Bleihälfte. Es werden daher dort die Eisenteile dichter zusammengerafft, als hier, wie aus Fig. 2a ersichtlich ist.

Die Figuren 3a und 3b beziehen sich ebenfalls auf einen von *Quincke* in der vorhin citirten Abhandlung untersuchten Fall, nämlich den der Strömung in einer quadratischen Platte, wenn eine Elektrode in der Ecke, die andere auf der von dieser Ecke ausgehenden Diagonale angebracht ist, in einer Entfernung, welche klein ist gegen die Seiten des Quadrats. In diesem Falle ist der Zuleitungsdraht zur Diagonalen-Elektrode senkrecht durch die Platte geführt, während der zur Ecke gehende wie sonst in der Ebene der Platte liegt. Auch hier ist die Uebereinstimmung der Magnetkraftlinien Fig. 3a mit den von *Quincke* theoretisch und experimentell bestimmten Aequipotentialen Fig. 3b augenfällig.

Diese Methode, die aequipotentialen Linien rasch und vollständig sichtbar zu machen, erscheint besonders willkommen in den Fällen, in welchen die Form der Platte der theoretischen Behandlung grosse, meist unübersteigliche Hindernisse entgegensetzt. Sie liefert sozusagen eine empirische Integration der entsprechenden partiellen Differentialgleichungen. Als Beispiele mögen noch die Aequipotentialen zweier minder gewöhnlichen Plattenformen angeführt werden.

^{*)} *Quincke*, Pogg. Ann. XCVIII. S. 382. 1856.

Fig. 4 zeigt die Aequipotentiallinien einer ringförmigen, von zwei
Fig. 4.

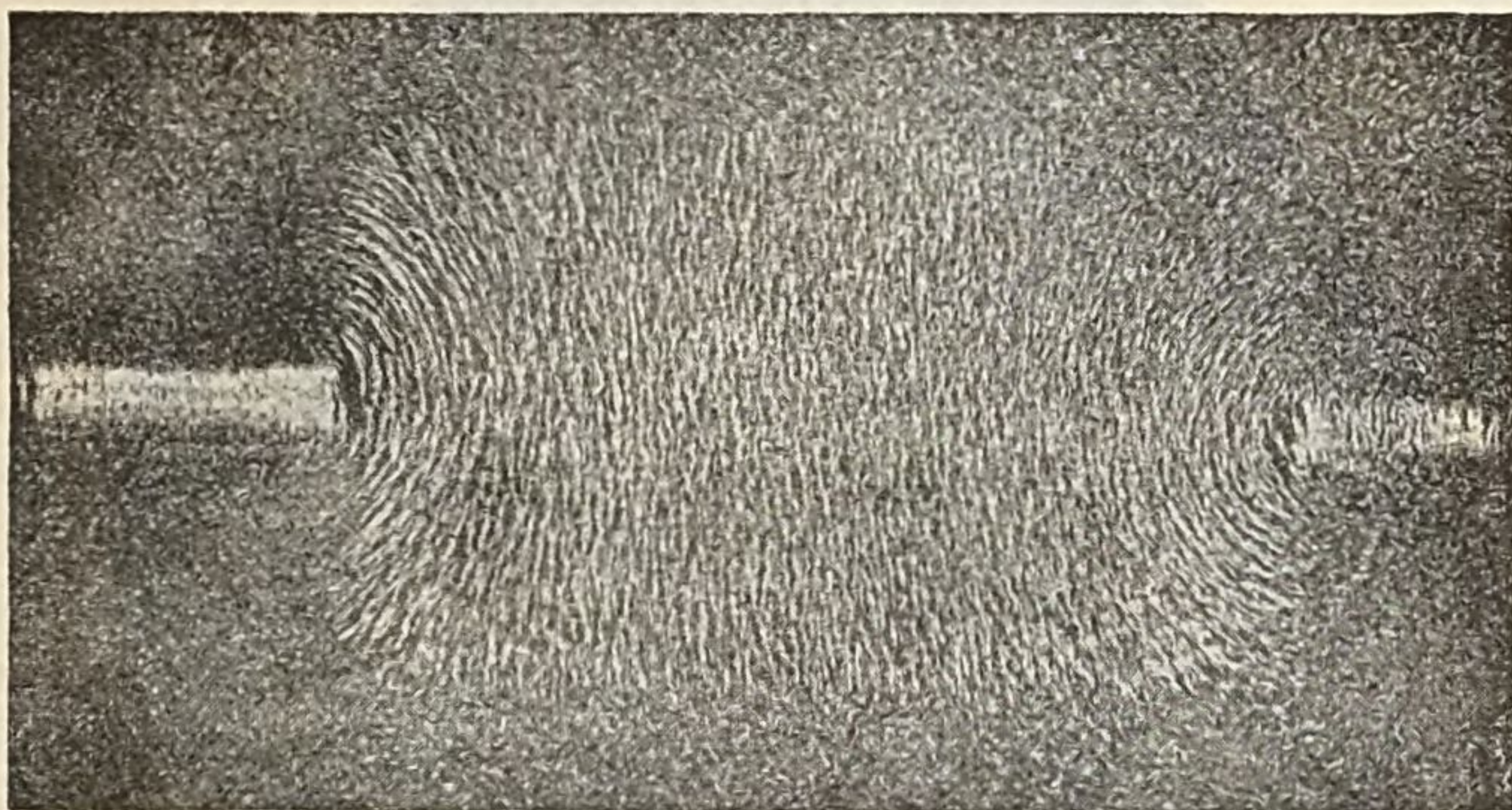
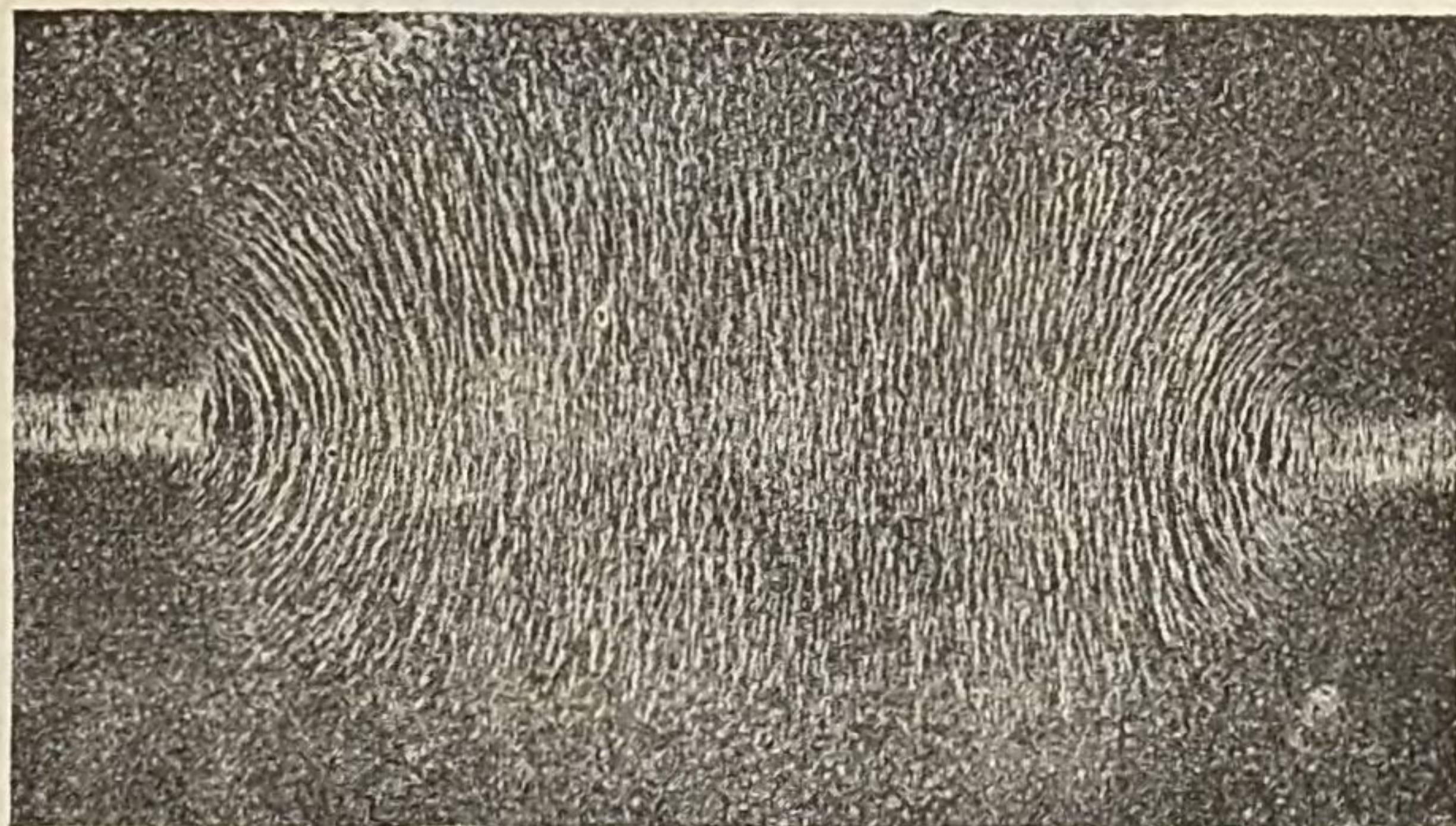


Fig. 5.



co ncentrischen Kreisen begrenzten Platte, mit Elektroden an den Endpunkten eines Durchmessers des äusseren Kreises. Die Fig. 5 entsteht auf einer rechteckigen Platte mit einem kreisrunden Loch in der Mitte und Elektroden an zwei gegenüberliegenden Ecken.

Es ist selbstverständlich und wurde schon Eingangs betont, dass nur die zur Strömung gehörigen Magnetkraftlinien mit den Aequipotentiallinien identisch sind, d. h. es ist vorausgesetzt, dass die Platte nicht auch noch von einem ihrer eigenen Strömung fremden Magnetfeld beeinflusst werde. Nähert man z. B. der Platte von seitwärts einen Magnetpol, so ordnen sich die Feilspäne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden zusammenwirkenden Systemen von Kraftlinien.

Als Beispiel hiefür diene das Bild Fig. 6, welches auf zwei gekreuzt aufeinander gelegten rechteckigen Streifen aus Kupferblech entsteht. Der obere der beiden Kupferstreifen ist in eine entsprechende flache Einbiegung des unteren mittels Schellack eingekittet, so dass die freien Oberflächen mit der Gypsfläche, in welche das Plattenpaar samt Zuleitungsdrähten eingebettet ist, in einer Ebene liegen; die Zuleitungsdrähte sind

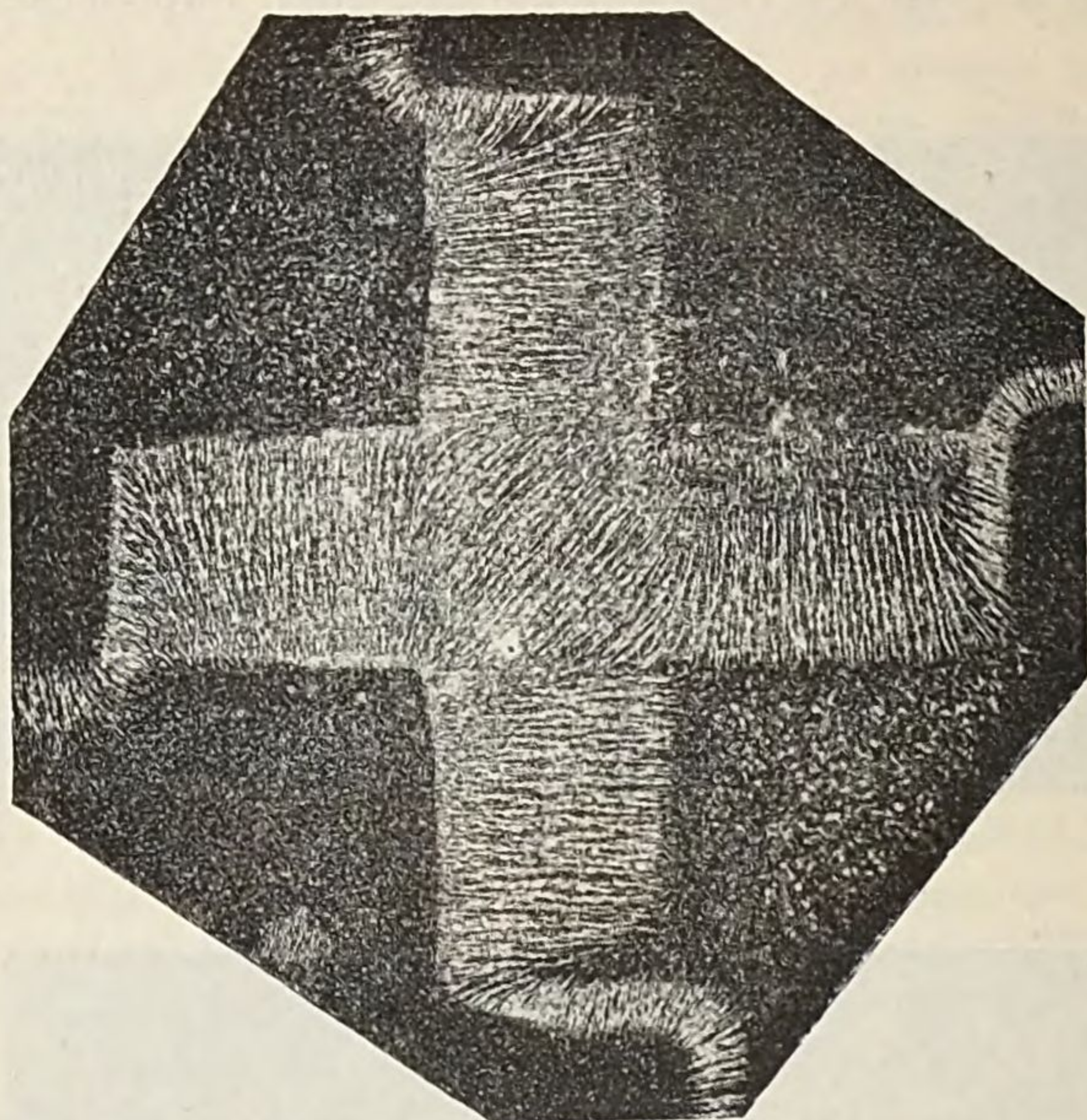


Fig. 6.

längs den kurzen Seiten der Rechtecke angelötet. Geht ein Strom durch die beiden mittels des Schellacks von einander isolirten Platten, so ordnen sich die Eisenfeilspäne auf dem Quadrat, in welchem sich die beiden Platten überdecken, diagonal, und zwar in Linien parallel der Diagonale, welche die Ecken des Quadrates verbindet, wo die Stromrichtung in der einen Platte auf die Ecke zu, in der anderen Platte von ihr weggeht. Kehrt man den Strom in der einen Platte um, so ordnen sich die Feilspäne parallel zur anderen Diagonale. Die Magnetkraftlinien auf dem gemeinschaftlichen Quadrat stellen sich sonach dar als die Resultanten aus den Magnetkraftlinien jeder Platte für sich, welche auf den freiliegenden Enden der Platten als zu den Quadratseiten parallele Linien hervortreten.

(E. v. Lommel.)

298b. Zwei Apparate für ein Verfahren zur Bestimmung von Querschnitt, Spannungsverlust und Belastung eines Leitungsnetzes auf mechanischem Wege von **H. Helberger**, Ingenieur in München.

Es sei ein System von n linearen Gleichungen folgender Form gegeben:

$$c_{11} x_1 + \dots + c_{1n} x_n = l_{11} a_{11} + \dots + l_{1n} a_{1n} = B_1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$c_{n1} x_1 + \dots + c_{nn} x_n = l_{n1} a_{n1} + \dots + l_{nn} a_{nn} = B_n$$

Dieses Gleichungssystem lässt u. A. folgende zwei physikalische Deutungen zu:

1. Man betrachte ein Netz von n elektrischen Kabeln. Eine beliebige Masche desselben, die wir mit dem Index k bezeichnen wollen, wird im allgemeinen aus n Leiterstücken bestehen. Bezeichnet man nun mit l_{ki} die Längen dieser Leiterstücke, mit a_{ki} die Ampère-Lastungen derselben, mit x_i ihre Querschnitte und mit c_{ki} die durch ihre elektrischen Widerstände bedingten Spannungsverluste, dann stellt die Produkt-Summe $l_{k1} a_{k1} + \dots + l_{kn} a_{kn}$, die wir kurz mit B_k bezeichnen wollen, die elektrische Inanspruchnahme der Kabelmasche, ausgedrückt in Ampère-Längen dar, und es werden die obigen Gleichungen zu Recht bestehen.

2. Man betrachte n einander kreuzende Schnüre, deren jede zwischen zwei Ständern so gespannt ist, dass sie an dem einen derselben befestigt ist, während sie an dem andern durch irgend welche Vorrichtung einer willkürlichen, durch Gewichte messbaren Spannung x unterworfen werden kann. An bestimmten Stellen seien die Schnüre durch Gewichtchen belastet. Die Länge eines beliebigen, zwischen zwei Knoten liegenden Schnurstückes sei mit l_{ki} , seine Belastung mit a_{ki} , der durch diese Belastung bewirkte Durchhang (Abweichung von der Lage, welche die Schnur vor der Belastung einnahm) mit c_{ki} und endlich das Gewicht, das seiner elastischen Spannung proportional ist, mit x_k bezeichnet. Dann würde mit grosser Annäherung wiederum das obige Gleichungssystem anwendbar sein, sofern es gestattet wäre, für die Durchhänge das Superpositionsprincip in Anspruch zu nehmen. Bemerkt sei, dass dieses Superpositionsprincip dann nicht engagirt ist, wenn es sich um die in der Praxis zumeist auftretende Aufgabe handelt, bei gegebenem zulässigen Spannungsverlust und gegebener geometrischer Configuration und Belastung des Kabelnetzes die Leiter-Querschnitte zu ermitteln, da ja dann immer ein bestimmt gegebener Durchhang austarirt wird; wohl aber bei allen Aufgaben, wo sich der Spannungsverlust unter den gesuchten Grössen befindet, sowie bei der Bestimmung der Energiebelastung der Speisequelle.

Damit sei nur die theoretische Grundlage des Helberger'schen Verfahrens, das, wenn man gerade will, man ja auch dazu verwenden könnte, um ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten mechanisch aufzulösen, kurz skizzirt. Im Uebrigen sei auf die Patentschrift (D. R. P. Nr. 68918) verwiesen.

(Schütz.)

Dritter Abschnitt. Verschiedene technische Anwendungen.

Y. Geodätische, nautische und meteorologische Instrumente.

299a. Mikro-Goniometer, zum Messen von Entfernungen vom Standpunkt des Instrumentes aus, von Prof. Cerebotani, München.

Die Einrichtung des Apparates beruht auf dem bekannten Princip, an den Endpunkten einer ihrer Länge nach bekannten Basis 2 Fernrohre zu befestigen und mittelst denselben das Object an zu visiren. Aus der Basis und dem Neigungswinkel der Fernrohre lässt sich dann die Höhe des Dreiecks, d. i. die Entfernung des Objectes berechnen. Der Einfachheit halber wird meist das eine Fernrohr fest mit der Basis verbunden, da eine geringe Abweichung vom rechten Winkel noch keine erkennbaren Fehler verursacht.

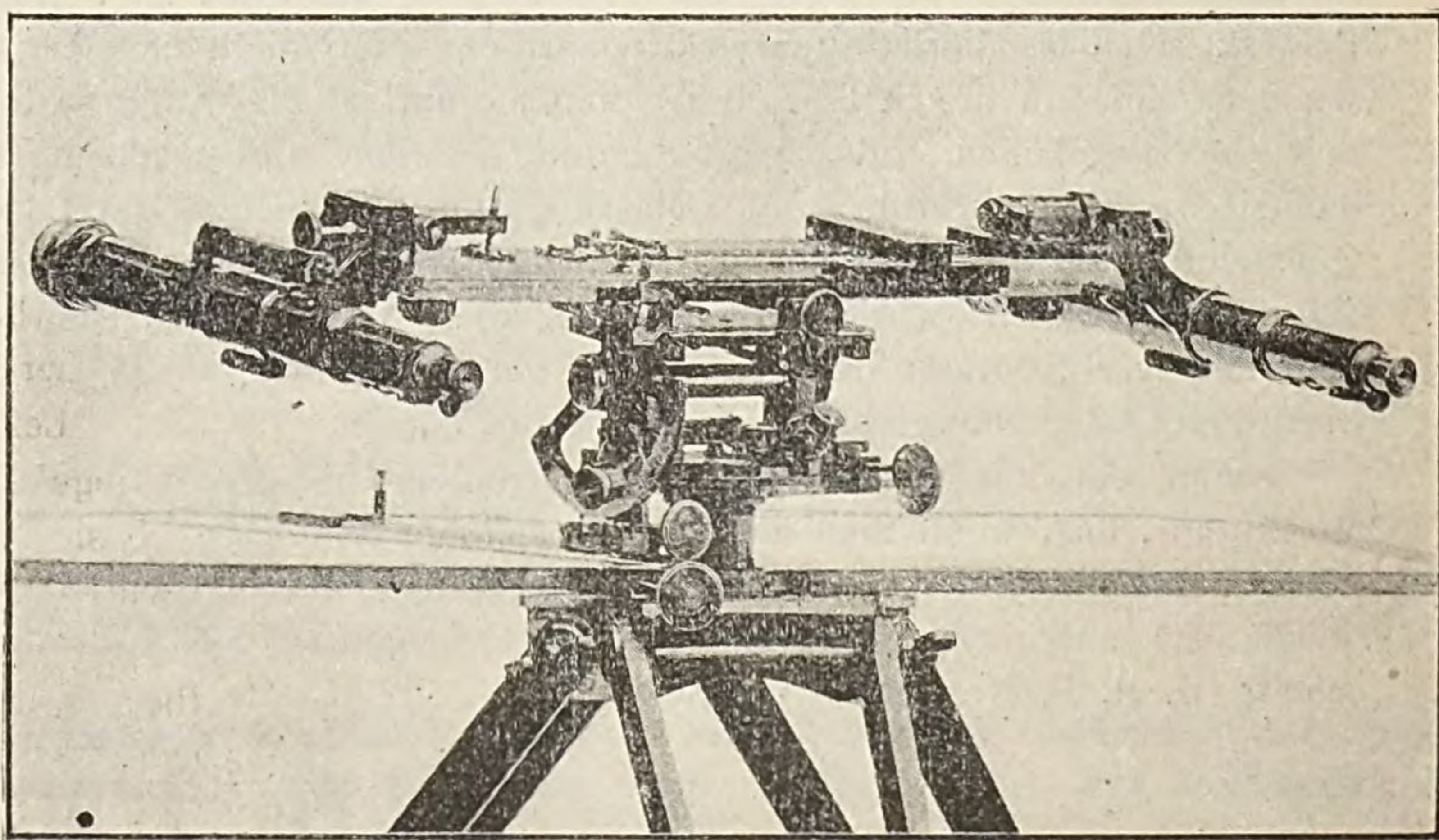


Fig. 1.

Die Neuerung besteht nun darin, dass die Drehung des beweglichen Fernrohres bewirkt wird durch Verschiebung eines Keiles. Ist die Steigung des Keiles bekannt, so lässt sich aus der Grösse dieser Verschiebung die Winkeldrehung des Fernrohres bestimmen.

Bei vorliegendem Instrument ist diese Methode dahin abgeändert, dass der Keil durch einen Schieber ersetzt wird, welcher längs zweier zu einander schwach geneigter Lineale gleitet, wodurch sich gleichsam der Keil-

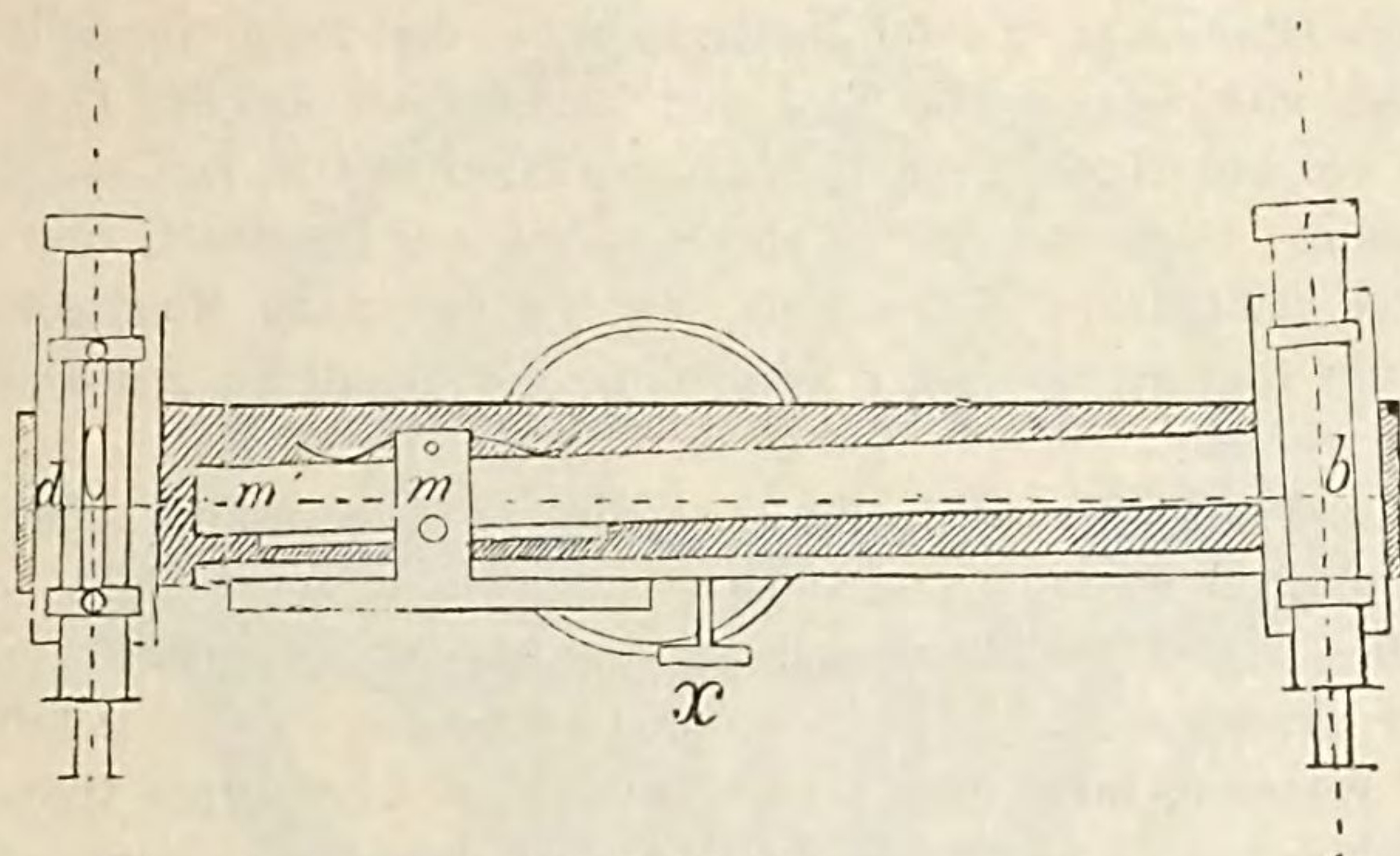


Fig. 2.

winkel ändert. Das gute Functioniren des Apparates hängt selbstverständlich von der genauen Ausführung dieser Lineale ab.

Das Mikro-Goniometer, in Verbindung mit einem Theodolithunterteil mit dem Namen Teletopometer bezeichnet, gestattet Höhen- und Längenmessungen, überhaupt topographische Aufnahmen jeder Art.

(Cerebotani.)

300a. **Projectionsglobus** von Reallehrer **Adami**, Bayreuth.

Der Projectionsglobus besteht aus vier von einander unabhängigen Systemen :

- 1) dem Doppelführungskreis, welcher die Einstellung des Apparates für jede geographische Breite ermöglicht;
- 2) dem beweglichen Horizont- und Meridiansystem, welches für die verschiedenen geographischen Breiten verschieden eingestellt wird;
- 3) dem beweglichen Himmelsgewölbe, enthaltend Himmelsäquator, Ekliptik, Solstitialkolor, nebst drei Parallelkreisen zum Himmelsäquator;
- 4) der Erdbahn mit den Bahnen der Planeten „Venus“ und „Mars“.

Drei in Grade geteilte kreisförmige Zeiger vermitteln mit der an dem Apparate angebrachten Teilung die Transformation der Coordinatensysteme: Azimut und Höhe, Rectascension und Declination, Länge und Breite direkt an dem Apparat.

Auf der Ekliptik lassen sich Scheiben und Sterne, welche Sonne, Mond, Venus und Mars vorstellen, verschieben und für jeden Tag einstellen. Der Apparat trägt ausser sämtlichen von der Erde aus sichtbaren Sternen erster Grösse noch die Sternbilder: urs. min.; urs. maj.; Cassiopeja; gemini; Orion und südliches Kreuz.

Durch Drehung des Systems 3) wird die scheinbare Bewegung des Himmelsgewölbes gezeigt und dient der Apparat hiebei zugleich als Uhr, welcher die Sternzeit und die wahre Sommerzeit für jeden Ort auf der Erde und für jeden Tag des Jahres angibt.

Der auf der Erdbahn verschiebbare Erdglobus ist um seine Axe drehbar und kann für jeden Tag so gestellt werden, dass seine Axe sich selbst parallel bleibt. Dieser Erdglobus besitzt einen beweglichen Horizont mit einem Zenithzeiger und einen beweglichen Meridian, wird von einer elek-

trischen Glühlampe von 50 N. K., welche die Sonne vorstellt, kräftig erleuchtet und zeigt so die Tag- und Nachtgrenze auf der Erde an, welche durch ein mit einem Zeiger versehenes Zifferblatt in Zeit ausgedrückt werden kann. Der Erdglobus ist umgeben von der Mondbahn und ergeben sich bei der elektrischen Beleuchtung die verschiedenen Mondphasen. Hierbei kann die Rückläufigkeit der Knotenlinie der Mondbahn zur Darstellung gebracht werden.

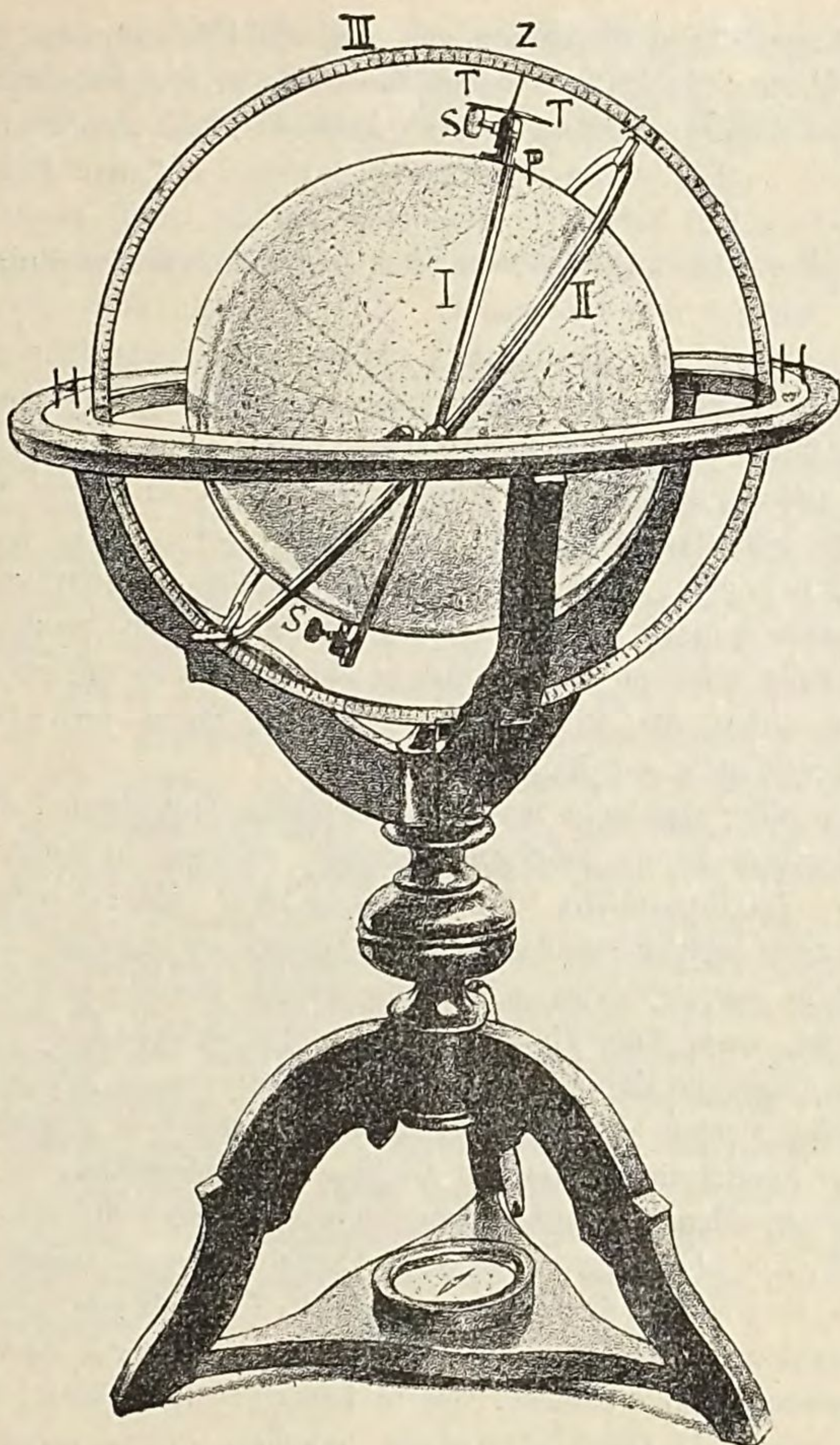
Das System 2) wird nun so gedreht, dass es mit dem beweglichen Horizont und Meridian des kleinen Erdglobus zusammenfällt, oder — weil sich dies wegen der 53,000 mal zu grossen Parallelaxe des Apparates nicht immer erreichen lässt — in zu den genannten Ebenen parallele Ebenen fällt, wodurch man die Ueberführung der scheinbaren Bewegung in die wirkliche erreicht und zugleich sieht, dass dasselbe Resultat erhalten wird ob man von einer feststehenden Erde und einem sich drehenden Himmelsgewölbe ausgeht, oder ob man ein feststehendes Himmelsgewölbe und eine sich drehende Erde als Ausgangspunkt annimmt.

Um die Präcession darzuthun, ist ein eigener Hilfskreis beigegeben, längs welchem sich der Rekt. Punkt 90^0 bewegt, wenn die Schnittpunkte des Himmelsäquators und der Ekliptik sich so bewegen, dass die Länge der Gestirne zunimmt, während ihre Breite constant bleibt. Ein ausserdem noch beigeügter Kreis zeigt die Bewegung des Aequatorpoles unter den Sternen im Verlaufe von ca. 25,000 Jahren.

Ausführlichere Beschreibungen finden sich: Ausland 1892 und Zeitschrift für naturwissenschaftlichen Unterricht von Dr. Poske, Dezemberheft 1892. (Adami.)

300b. Praecessions-Globus angegeben und ausgestellt von Professor **Dr. K. Haas** in Wien.

Der Globus bezweckt eine anschauliche Darstellung der Veränderungen des Sternenhimmels, welche die Präcession der Tag- und Nachtgleichen und die Variation der Schiefe der Ekliptik für irgend einen Ort der Erde bewirken, sowie eine (annäherungsweise) Berechnung dieser Veränderungen. Zu diesem Zwecke ist der Globus in drei Ringen, einem inneren, mittleren und äusseren, angebracht. Im inneren Ringe kann der Globus um eine Axe gedreht werden, welche durch die Pole der Ekliptik geht. Der Betrag der Drehung kann auf dem Ekliptikkreise des Globus unmittelbar abgelesen werden und zwar entspricht eine Drehung um einen Grad in der Richtung von 0^0 nach 10^0 einem Rückgange um circa 72 Jahre. Der innere Ring kann gegen den mittleren eine Neigung erhalten, welche der Schiefe der Ekliptik für die betreffende Zeit entspricht. Der mittlere Ring endlich kann in dem äusseren um eine Axe gedreht werden, welche der jeweiligen Himmelsaxe entspricht. Die Stellungen der Ringe gegen einander können mittelst Klemmschrauben fixirt werden. Der äussere Ring ist in dem Gestelle des Globus um eine horizontale Axe drehbar, so dass der Globus für jede Polhöhe eingestellt werden kann. Der äussere Ring trägt eine Teilung, an welcher die Schiefe der Ekliptik (mittelst eines Zeigers, der auf dem inneren Ringe aufgeschraubt werden kann), die Polhöhe des betreffenden



Ortes und die Declination der Gestirne abgelesen werden kann. Der horizontale, obere Rand des Gestelles trägt eine Teilung, welche das Azimut mit Hilfe einer dioptrischen Vorrichtung abzulesen gestattet. 11° unter diesem horizontalen Rande ist ein Reif zur Markierung des Sehungsbogens für Sterne erster Grösse angebracht. Das Globusgestell ist mit sanfter Reibung um eine verticale Axe drehbar, damit die Erscheinungen einem grösseren Zuhörerkeise demonstriert werden können. (Zu diesem Zwecke könnte bei grösserer und kostspieligerer Ausführung des Globus im Centrum desselben eine Glühlampe angebracht werden und könnten die Punkte, an welchen sich Sterne erster Grösse befinden, durchlöchert werden. Diese Oeffnungen wären für gewöhnlich durch Metallstifte zu schliessen, für die Demonstration aber für das betreffende Gestirn zu öffnen.)

Mit diesem Globus lassen sich eine Reihe von Thatsachen, die für die Geschichte der Astronomie von höchstem Interesse sind, demonstrieren: So die in den Abhandlungen über Tempelorientirung von Prof. Nissen

(Bonn)¹⁾ angeführten Erscheinungen, die von Prof. Hommel (München) aus der assyrischen Astronomie²⁾ und von Schlegel aus der chinesischen Astronomie³⁾ angeführten Daten, die von Lockyer⁴⁾ und Penrose⁵⁾ besprochenen Vorgänge; endlich, wenn der Stand der Sonne auf dem Ekliptikkreise [der den Schram'schen Tafeln⁶⁾ entnommen werden kann] markiert wird, auch die in den Tafeln von Wislicenus⁷⁾ angeführten schönen Beispiele aus Censorinus, Geminus und Ptolemaeus. Diesen Tafeln lässt sich auch am bequemsten die Schiefe der Ekliptik für das betreffende Jahr entnehmen.

Historisches. Der erste Praecessionsglobus wurde von Biot erfunden und in seinem *Traité élémentaire d'astronomie physique*. 3. Auflage. Band IV. S. 641 ff. beschrieben. Dieser Globus ist in einem Ringe um eine durch die Ekliptikpole gehende Axe drehbar. Der Ring trägt einen Fortsatz mit Schraube, mittelst welcher der Globus in Schraubenmutter, die in Distanzen von 10 zu 10 Grad auf der Ekliptik angebracht sind, befestigt werden kann. Dieser Ring rotirt in einem zweiten um eine Axe, welche mit der durch die Ekliptikpole gehenden einen constanten Winkel gleich der Schiefe der Ekliptik, bildet.

Eine rohe, aber sehr einfache und billige Vorrichtung, die jeder Flaschner anfertigen kann, beschreibt Gustav Schlegel in seiner *Uranographie chinoise*. La Haye 1875. I. Band Seite 13 ff. Zuerst wird der Globus in einem genau anschliessenden Aequatorialringe so befestigt, dass derselbe die Ekliptik in jenen Punkten schneidet, welche für die gewünschte Zeit dem Frühlings-, resp. dem Herbst-Aequinoctium entsprechen (und möchte ich zusetzen, dass die Ekliptik und die Ring-Ebene einen Neigungswinkel bilden welche der Schiefe der Ekliptik zur betreffenden Zeit gleichkommt). Hierauf wird der Aequatorialring sammt Globus in einem Gehäuse von 2 sich rechtwinklig schneidenden Kupferringen befestigt, die an ihrem Kreuzungspunkte Fortsätze (im Abstand von 90° vom Aequatorialringe) tragen, mit denen das Gehäuse in gewöhnlicher Weise in einem Verticalringe montirt wird.

Unabhängig von Biot hat der englische Astronom Lockyer 1891 einen Praecessionsglobus ersonnen, der in Lagern gedreht wird, die sich in Abständen von je 15 Grad auf Kreisen befinden, welche von den Ekliptikpolen einen Abstand gleich der Schiefe der Ekliptik haben. Er hat mit diesem Globus sehr schöne Untersuchungen angestellt und denselben in der „Nature“ (Vol. 44 pag. 108) beschrieben.

Der von mir unabhängig von der genannten Vorrichtung angegebene

¹⁾ Nissen. Ueber Tempelorientirung. (Rheinisches Museum. XXVIII 513. XXIX, 369. LX 38, 329, 480. LXII 28.)

²⁾ Ausland. 1891, 92.

³⁾ Schlegel. Uranographie chinoise.

⁴⁾ Nature. Band XLIV. pag. 108.

⁵⁾ Nature Nr. 1165 und Nr. 1228.

⁶⁾ R. Schram. Hilfstafeln für Chronologie. 45. Band der Denkschriften der kaiserlichen Akademie zu Wien.

⁷⁾ Wislicenus. Tafeln zur Bestimmung der jährlichen Auf- und Untergänge der Gestirne. Publication der Astronomischen Gesellschaft. XX Leipzig, Engelmann. 1892.

Globus ist eine Modification der cardanischen Aufhängung und gestattet die Himmelskugel um jeden beliebigen Durchmesser zu drehen. Er wurde von der Firma Alois Pichlers Witwe und Sohn (Wien) angefertigt.

(Haas.)

300c. Hipparch's Astrolabium, construiert und ausgestellt von Oberlehrer **M. Koppe** in Berlin.

Der Apparat gestattet, alle Aufgaben über die tägliche Drehung des Himmels für die Polhöhe von Berlin zu lösen. Zwei auf einander liegende Kreisscheiben, von denen die obere transparent ist, können gegen einander gedreht werden. Die untere trägt ein sphärisches Netz, dessen Kreise theils dem Horizont parallel sind, theils vom Zenit zum Nadir gehen. Die obere ist mit dem Netz der Linien gleicher Rectascension und gleicher Declination versehen, in welches die Sternbilder eingezeichnet sind. Der Rand ist hier in 24^h, dort in 365 Tage eingetheilt. Legt man die Scheiben so aufeinander, dass die dem augenblicklichen Datum und der Stunde entsprechenden Randpunkte sich decken, so erscheinen innerhalb des durchschimmernden Horizontes die gerade sichtbaren Sternbilder, und man kann Höhe und Azimut jedes Sternes ablesen. Ausserdem ergibt sich aus der in das untere Netz gezeichneten Erdkarte der Erdort, wo der Stern gerade im Zenit steht. In den ehemaligen Astrolabien war die obere Scheibe eine netzartig durchbrochene, an sich undurchsichtige Platte (rete, aranea), in der nur die Sterne erster Grösse von schmalen Ausläufern des Netzes getragen wurden. Ferner war zur Einstellung für Tag und Stunde die Benutzung einer auf der Rückseite (dorsum) angebrachten Tabelle nötig, weil vor Einführung der mittlern Zeit die Einteilung nach Tagen ungleiche Teile erfordert hätte, also selbst nur nach einer Tabelle herzustellen gewesen wäre. Die Karten sind nach stereographischer Projection gezeichnet, wobei das Auge im Südpol des Himmelsgewölbes gedacht wurde.

(M. Koppe.)

300d. Die heliocentrischen und geocentrischen Bahnen des Mars (Ia, Ib), des Jupiter (II), des Saturn (III) und des Neptun (IV), construiert und ausgestellt von Oberlehrer **M. Koppe** in Berlin.

Die Karte Ia enthält die heliocentrische Bewegung der Erde und des Mars unter Berücksichtigung der Excentricität, für 1890—1900. Die gewählten Zeitpunkte sind abkürzend durch Zahlen bezeichnet, deren Bedeutung nach Tag und Jahreszahl eine Tabelle angibt. Verschiebt man, ohne zu drehen, einen Bogen Pauspapier (Ib) so über die Karte Ia hin, dass ein fester Punkt O derselben durch die aufeinanderfolgenden Punkte der Erdbahn geführt wird, und überträgt man immer die gleichzeitigen Oerter des Mars aus der unteren Karte in die obere, so erhält man die geocentrische Bahn des Mars, deren Gestalt an eine Epicykloide erinnert. Dass die Verschiebung ohne Drehung geschieht, erkennt man an den beiden Systemen aequidistanter Horizontal-Linien, mit denen die obere und die untere Karte versehen sind. Da die Abstände der Parallelen in Ia und Ib ein wenig verschieden sind, so fallen nach dem Princip des Nonius bei paralleler Lage

der beiden Systeme gewisse Linien genau aufeinander. — Auf den übrigen Karten ist neben den heliocentrischen Oertern der Erde und des Planeten zugleich der geocentrische Ort dargestellt. Zu bemerken ist, dass in der Karte des Neptun benachbarte Schleifen der Bahn in einander greifen.

(M. Koppe.)

300e. Finsternistafel nach Lambert, construiert und ausgestellt von Oberlehrer **M. Koppe** in Berlin.

Die 29 wagerechten Linien stellen aufeinanderfolgende julianische Jahre dar, ausgehend von einem beliebigen Tage, an dem Sonne und Mond in einem Knoten der Mondbahn zusammentrafen. Ein solches Ereignis wiederholt sich fast genau nach der Zeit $P_1 = 28$ Jahr 345 Tage, weniger genau schon nach $P_2 = 18$ Jahr 11 Tagen, eine ganz genaue Wiederkehr erfolgt erst nach der Zeit $11 P_1 + P_2$. Auf den wenigen wagerechten Hilfs-Linien oberhalb der Tafel ist angegeben, in welchen Punkt der ersten Linie für jede neue Periode von 18 oder 29 Jahren zum ersten Male ein erster Januar fällt und welches Kalenderjahr mit ihm beginnt. Mittelst des beigegebenen Papiermasstabes, auf welchem ein Jahr in 365 Tage geteilt ist, kann man dann Tag und Jahr für jeden Punkt der 29 Linien bestimmen. Es sind nun die Zeitpunkte wiederkehrender Neumonde mit kleinen roten Kreisen, die Zeitpunkte der Durchgänge der Sonne durch einen Knoten der Mondbahn mit grossen roten Kreisen bezeichnet. Eine centrale oder eine beliebige Sonnenfinsternis tritt ein, wenn ein kleiner roter Kreis einen benachbarten grossen Kreis trifft oder ganz in ihm liegt. Der Mittelpunkt des kleinen Kreises gibt das julianische Datum an. In derselben Weise lassen die blauen Kreise die Mondfinsternisse für alle historischen Zeiten erkennen. Die Tafel ist von dem Lambert'schen Original (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendungen, Berlin 1765) nur durch Einführung neuerer Zahlenwerte verschieden.

(M. Koppe.)

304a. Berichtigungstafel zur Lux'schen Gaswage, 1890 entworfen und berechnet von Prof. **Mehmke**, techn. Hochschule Darmstadt. Verlag von **Fr. Lux**, Friedrichshafen a. Rh.

Durch blosses Abgreifen und Auftragen einer Strecke mit einem Zirkel liefert diese Tafel zu jedem Wertsystem der drei Veränderlichen x , y , z den zugehörigen Wert der Function

$$u = 1 - \frac{1 - z}{\frac{288}{273 + x} \cdot \frac{y}{760}},$$

wobei u das wirkliche spezifische Gewicht eines Gases bedeutet, für welches die Lux'sche Gaswage bei $x^\circ \text{C}$ und $y \text{ mm}$ Barometerstand das spezifische Gewicht z ergeben hat. (Gebrauchsanweisung auf der Tafel selbst und in den beiliegenden Begleitworten.)

(Mehmke.)

304b. Quecksilber-Compensationspendel, (D. R. P.) von S. Riefler, Ingenieur München.

Neu an diesem Quecksilber-Compensationspendel ist, dass das Quecksilber sich in der Höhlung der aus einem Mannesmannstahlrohr bestehenden Pendelstange befindet, wodurch einerseits zufolge der Verteilung der Quecksilbermasse auf einen namhaften Teil der Pendellänge die Zuverlässigkeit der Compensation erhöht wird, während andererseits die durch diese Anordnung geschaffene Einfachheit der geometrisch-mechanischen Bedingungen es nach empirischer Ermittlung des Ausdehnungskoefficienten des Pendelrohres leicht gestattet, die zur Herstellung der Compensation erforderlichen Dimensionen der Quecksilbersäule genau vorher zu berechnen.

Die Regulirung der Schwingungsdauer geschieht durch Variation von Lage und Gewicht der Pendellinse.

Nachtrag.

10d. Diagramm zur Umrechnung von Münzsorten, von A. G. Greenhill, Artillery College Woolwich.

77a. Planimeter von Hine und Robertson, Newyork, ausgestellt von A. G. Greenhill, Artillery College Woolwich.

130a. Die semiregulären Polyeder nach Catalan, Universität Lüttich. Deja-grave, Paris.

239h. Zwei Modelle zur Erklärung des W. Hess'schen Falles der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Von Prof. N. Joukovsky, Universität Moskau.

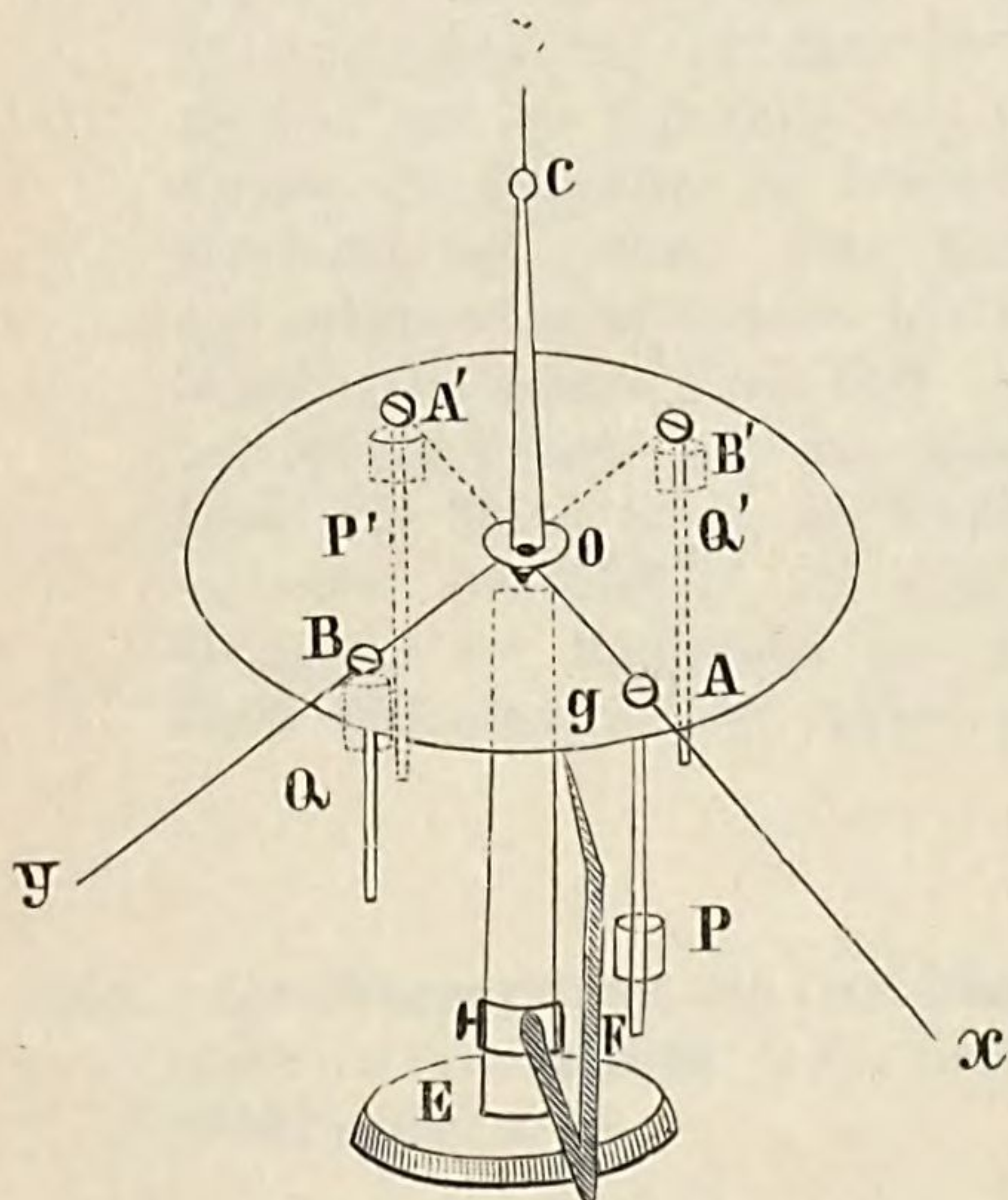


Fig. 1.

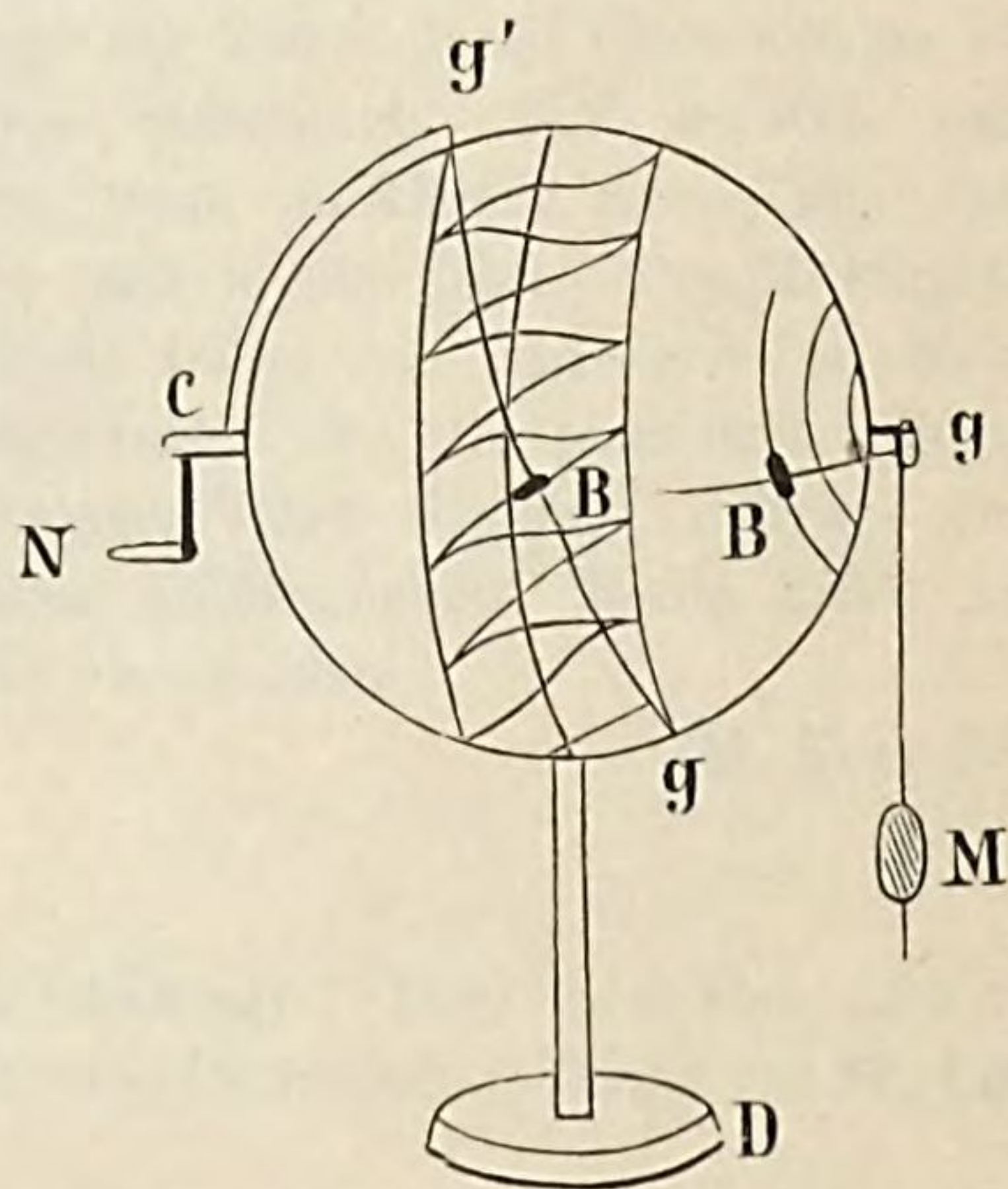


Fig. 2.

239i. Ballistikon von Major J. v. Krain'sky, Wien.

245b. Zwei kinematische Modelle. Von Prof. N. Joukovsky, Universität Moskau.

Namenregister. *)

- | | |
|---|--|
| <p> Abdank-Abakanowicz. 34.
 Abel. 70.
 Adami. 125.
 Alexander. 42, 77, 78, 90, 92, 95, 97.
 Amsler. 32, 33, 34.
 Aron. 37.
 Babbage. 6.
 Bailey. 2.
 Balog. 61, 62.
 Bardin. 51.
 Bauschinger. 88.
 Bessel. 106.
 Biot. 128.
 Blater. 1, 3, 4.
 Blümcke. 112.
 Böhner. 116.
 Bohnenberger. 81.
 Boltzmann. 116, 117.
 Bouchet. 5.
 Boys. 49.
 Brandl. 5.
 Brauer. 16, 20, 40.
 Brill, A. 57.
 Brugger. 35.
 Brunn. 63, 64, 73.
 Bürger. 3.
 Burkhardt. 5, 6.
 Burmester. 50, 51, 97, 98.
 Catalan. 131.
 Centnerschwer. 3.
 Cerebotani. 48, 124.
 Chasles. 98, 99.
 Clouth. 3.
 Coradi. 32, 34, 35.
 Culmann. 1.
 Darmstadt, Mathem. Institut der techn.
 Hochschule. 17, 31.
 Delagrave. 42.
 Despeyroux. 71.
 Diem. 29, 71. </p> | <p> Dinkelmeyer. 50.
 Dixon. 2.
 Döhlemann. 28.
 Ducretet. 81.
 Dublin, Trinity College. 90, 91.
 Dyck. 69, 71, 72, 73.
 Ebert. 116.
 Eckhardt. 9, 39.
 Edelman. 97.
 Ernst. 34.
 Euler. 8.
 Euclid. 3.
 Exel. 31.
 Feld. 22.
 Feldmaier. 48.
 Felt. 5.
 Fischer, E. 42.
 Fischer, K. 36.
 Fischer, O. 100, 103.
 Foucault 76, 79.
 Fourier. 36.
 Francis-Galton. 6.
 Fränkel. 89.
 Fraunhofer. 108.
 Fresnel. 106.
 Freyberg. 88.
 Freytag. 90.
 Ganguillet. 18.
 Gauss. 31.
 Gilbert. 78, 81.
 Goeringer. 38.
 Goldschmitt. 39.
 Greuner. 5.
 Gunter. 21.
 Haas. 126.
 Hammer. 6.
 Harley. 5, 8.
 Hart. 104.
 Hartl. 74.
 Hartmann. 37. </p> |
|---|--|

*) Die beigesetzten Zahlen sind Seitenzahlen.

- Heawood. 64.
 Heffter. 64, 65, 66.
 Helberger. 122.
 Henneberg. 72.
 Hennig. 83.
 Henrici. 34, 35.
 Herbst. 75, 88.
 Herrmann. 2, 4.
 Hess. 55, 131.
 Hildebrandt. 42.
 Hipparch. 129.
 Hoare. 2.
 Hohmann. 34.
 Hölder. 3, 4.
 Hommel. 128.
 Hossfeld. 56.
 Jadanza. 110.
 Jevons. 8.
 Joukovsky. 131.
 Karlsruhe, Seminar für darstellende Geometrie. 70.
 Kelvin. 49.
 Kerschensteiner. 23.
 Kleiber. 101.
 Klein. 9, 23, 25, 28, 69.
 Kohl. 74.
 Kohlrausch. 37.
 Koppe. 75, 76, 129, 130.
 Kreuter. 76.
 Kronecker. 9, 25.
 Krüss. 55.
 Kulik. 3.
 Kummer. 50.
 Kutter. 17, 18, 19.
 Lalanne. 8.
 Lambert. 130.
 Laundry. 3.
 Lehner. 47.
 Leonelli. 31.
 Leuner. 83, 89.
 Lockyer. 128.
 Lodge. 116.
 Löwen, Universität. 78.
 Lommel. 106, 118.
 Lorenz. 75, 78.
 Lux. 130.
 Mac Laurin. 29.
 Mac Mahon. 70.
 Mayer. 48.
 Martz. 42.
 Maxwell. 116.
 Mehmke. 8, 9, 10, 16, 17, 19, 20, 21, 31, 40, 42, 130.
 Merpaut. 3.
 Miller. 3.
 Mohn. 111.
 Monge. 51.
 München, techn. Hochsch., Sammlung für darstellende Geometrie. 50, 51.
 München, geod. Institut der techn. Hochschule. 1, 2, 3, 32.
 München, Mathem. Institut der techn. Hochschule. 57, 71.
 München, Sammlung für Ingenieurwissenschaften. 1.
 München, Mech.-techn. Laboratorium der techn. Hochsch. 88.
 München, Kinematische Sammlung der techn. Hochschule. 72, 82, 96, 97, 98.
 Muret. 51.
 Neesen. 81.
 Ocagne. 10, 18, 19.
 Ott, A. 38, 76.
 Ott, M. 32, 34, 48.
 Pascal. 39.
 Peaucellier. 104.
 Penrose. 128.
 Pötzl. 3, 4.
 Poske. 126.
 Pressel. 76.
 Pringsheim. 29.
 Quincke. 120.
 Rankine. 90.
 Reuschle. 9.
 Riefler. 131.
 Riemann. 70.
 Rodenberg. 96.
 Röther. 38.
 Roucole. 42.
 Ruth. 2.
 Schilling. 72.
 Schlegel. 6, 128.
 Schlömilch. 69.
 Schmidt. 78.
 Schoute. 25.
 Schram. 128.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| Schröder. 72, 99. | Tötösy, B. v. 61, 62. |
| Schultheiss. 57. | Urban. 32. |
| Schütz. 36. | Vissen. 127. |
| Schwarz. 56. | Vogler. 22. |
| Sharp. 34, 35, 36. | Voisin. 3. |
| Shortrede. 3. | Voss. 73. |
| Siemens. 37. | Walter. 23. |
| Sonne. 3. | Webb. 5. |
| Stanhope. 5, 8. | Weber. 2. |
| Stanley. 2, 42. | Weichold. 69. |
| Steinhauser. 3, 4. | Weinhold. 75. |
| Stöhrer. 75, 88, 105. | Weierstrass. 56. |
| Strachey. 5. | Wetli-Hansen. 32:34. |
| Stühler. 50. | Wiener, Chr. 56, 70. |
| Sylvester. 9, 25. | Wilhelm Herzog von Urach, Graf von
Württemberg. 5. |
| Szymanski. 88. | Williamson. 92. |
| Tait. 96. | Wislicenus. 128. |
| Tarrant. 5. | Wittstein. 31. |
| Tannery. 71. | Wolff. 57. |
| Tavernier-Gravet. 1. | Wüst. 1. |
| Tesch. 70. | Yeates. 90. |
| Thode. 1. | Zimmermann. 4. |
| Thomson. 37, 42, 77, 78, 92, 95, 97. | |
| Töpler. 83, 88. | |

Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate
und Instrumente

Bd.: [2]

1893

Math.a. 72 r-2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650213-9